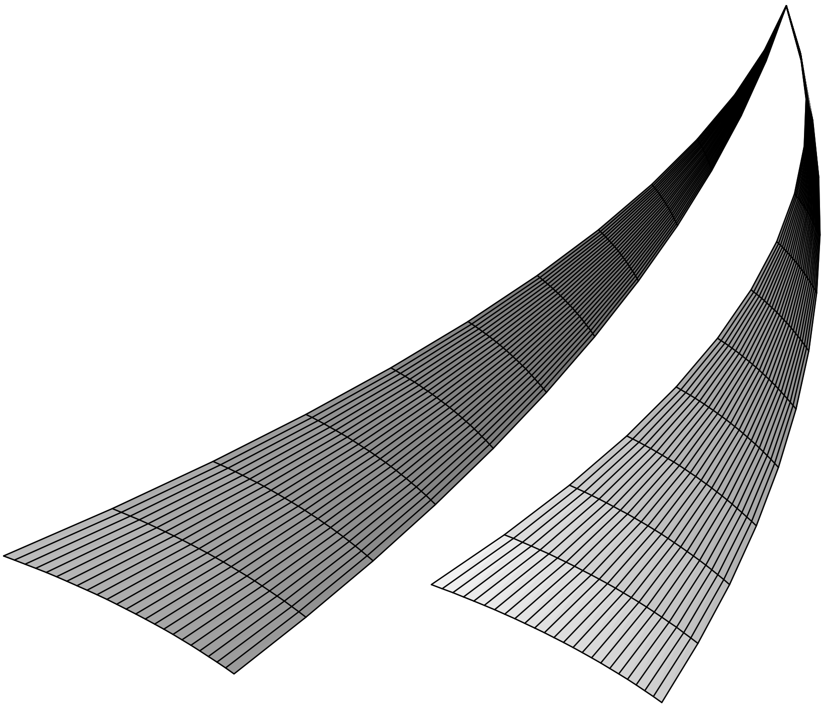
Mestrado em Matemática Aplicada

EXAMES DE QUALIFICAÇÃO

1989 – 2002



Universidade Federal do Rio de Janeiro
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

EXAMES DE
CÁLCULO AVANÇADO

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA

Exame de Cálculo Avançado

Setembro de 1989

$1^{\underline{a}}$ Questão:

Qual o volume da maior caixa retangular com lados paralelos aos planos coordenados que pode ser inscrita no elipsoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$?

$2^{\underline{a}}$ Questão:

Considere as seguintes normas definidas em $E = C^1\big([0,1];\mathbb{R}\big)$:

$$\|f\|_1 = \sup\big\{|f(x)| \mid x \in [0,1]\big\}$$
$$\|f\|_2 = \sup\big\{|f(x)| \mid x \in [0,1]\big\} + \sup\big\{|f'(x)| \mid x \in [0,1]\big\}$$

Exiba uma sequência $f_n \in E$ convergente na norma $\|f\|_1$ e divergente na norma $\|f\|_2$. Justifique suas afirmativas.

$3^{\underline{a}}$ Questão:

Demonstre a fórmula da mudança de variáveis de integração no caso particular em que a mudança é da forma $(x,y) \mapsto (x, g(x,y))$, onde $\big(\partial g/\partial y\big)(x,y) \neq 0$, para todo número real y.

$4^{\underline{a}}$ Questão: (O objetivo desta questão é provar a lei de Gauss da eletrostática)

O potencial do campo elétrico de uma carga puntiforme situada na origem é dado por $f(x,y,z) = 1/(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$.

a) Mostre que o fluxo deste campo por uma superfície fechada que não contém a origem é zero.

b) Calcule o fluxo através de uma esfera de raio R e centro na origem.

c) Calcule o fluxo através de uma superfície fechada qualquer que contenha a origem.

$5^{\underline{a}}$ Questão:

Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Mostre que as componentes conexas do conjunto

$$\Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 0 \quad \text{mas} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \neq 0\Big\}$$

são difeomorfas à reta.

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA

Exame de Cálculo Avançado

Março de 1990

$1^{\underline{a}}$ Questão:

Seja $f\colon \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 e tal que $f(tx) = t^2 f(x) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^N$. Mostre que

$$f(x) = \frac{1}{2} D^2 f(0) \cdot x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

$2^{\underline{a}}$ Questão:

Seja $p \in]1, \infty[$ e seja $B = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \sum_{i=1}^N |x_i|^p = 1\}$

a) Seja $y = (y_1, \ldots, y_N) \in \mathbb{R}^N$. Calcule $\max_{x \in B} |y_1 x_1 + \ldots + y_N x_N|$.

b) Demonstre a desigualdade de Hölder:

$$|\sum_{i=1}^N x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^N |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^N |y_i|^q \right)^{1/q} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N \ \forall y \in \mathbb{R}^N,$$

onde q é tal que $1/p + 1/p = 1$.

$3^{\underline{a}}$ Questão:

Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = xy + \frac{1}{2} e^{-(x^2+y^2)}$ e seja $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 1\}$.

a) Mostre que C é uma curva (isto é, que numa vizinhança de cada um de seus pontos C é gráfico de uma função).

b) Mostre que C não é conexa.

$4^{\underline{a}}$ Questão:

Considere $F\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ um campo de vetores C^∞. Seja $\Phi\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ o fluxo associado a F, isto é: se $v\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é dada por $v(t) = \Phi(t, x, y, z)$, (x, y, z) fixo, então $v(0) = (x, y, z)$ e $\frac{d}{dt} v(t) = F(v(t))$. Considere sabido que Φ é de classe C^∞.
Seja $B_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ e seja, para cada t em $\mathbb{R}$,

$$B(t) = \{\Phi(t, x, y, z) \mid (x, y, z) \in B_0\}.$$

Seja $v\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por $v(t) = \int_{B(t)} dx$ (isto é, $v(t) =$ volume de $B(t)$). Calcule $v'(0)$ em termos apenas de B_0 e de F.

Sugestão: não se esqueça de que $\Phi(0, x, y, z) = (x, y, z)$.

5ª Questão:

Seja $u: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 e seja $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Considere $m: [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $m(r)$ = valor médio de u sobre C_r, onde

$$C_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\}.$$

a) Calcule $m'(r)$.
b) Seja $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Mostre que se Δu é sempre não negativo então m é não decrescente e que se Δu é sempre não positivo então m é não crescente. Em particular, demonstre a propriedade da média: se u é harmônica ($\Delta u = 0$), então $m(r) \equiv u(a,b)$.

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA
Exame de Cálculo Avançado
Setembro de 1990

1ª Questão:

Seja $I_N = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\pi\|x\|^2}\,dx$, $x \in \mathbb{R}^N$.

a) Prove que $I_2 = 1$.
b) Mostre que $I_2 = I_1^2$.
c) Use (b) para mostrar que $I_N = 1\ \forall N \in \mathbb{N}$.

2ª Questão:

Sejam $\gamma: (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}^3$, C^1, com $\gamma'(t) \neq 0\ \forall t \in (a,b)$, $p_0 \in \mathbb{R}^3$ tal que $p_0 \notin \gamma(t)\ \forall t \in (a,b)$ e $\langle\, ,\, \rangle$ o produto interno usual de $\mathbb{R}^3$. Defina $g(t) = \|\gamma(t) - p_0\|^2$ onde $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$. Mostre que g é C^1, calcule sua derivada e mostre que $g'(t_0) = 0$ se e somente se $p_0 - \gamma(t_0)$ é perpendicular ao vetor tangente a γ em t_0, $\gamma'(t_0)$.

3ª Questão:

Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$. Dizemos que A é uma raiz cúbica de T se $A^3 = T$.

a) Mostre que existem uma vizinhança U da identidade e uma função

$$\varphi: U \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$$

de classe C^∞ tal que $\varphi(I) = I$ e $\varphi(T)$ é uma raiz cúbica de $T \in U$.
b) Mostre que para $m = 2$ a identidade admite mais de uma raiz cúbica.

4ª Questão:

a) Deduza do Teorema da Divergência (Gauss) a 2^a identidade de Green:

$$\int_\Omega \Delta u v - \Delta v u = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v - \frac{\partial v}{\partial \eta} u.$$

b) Conclua que se u é harmônica então $\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$.

c) Seja $B_r = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| \le r\}$ e $\Omega_\epsilon = B_r \setminus B_\epsilon$, $r > \epsilon > 0$.
Considere $v = \frac{1}{\|x\|}$ e faça $\epsilon \to 0$ para obter o *teorema da média*:

$$u \text{ harmônica } \Rightarrow u(0) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B_r} u.$$

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA
Exame de Cálculo Avançado
Fevereiro de 1991

1ª Questão:

Seja $\varphi \colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma contração (i.e., existe $0 < \lambda < 1$ tal que $\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \le \lambda \|x - y\|$). Prove que a aplicação $f \colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ dada por $f(x) = x + \varphi(x)$ é um homeomorfismo de $\mathbb{R}^m$ sobre si mesmo.

2ª Questão:

Seja Ω um aberto em $\mathbb{R}^3$ e seja $u \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2. Seja $P \in \Omega$ e suponha que a bola de centro P e raio R esteja contida em Ω. Para $r \in [0, R]$ defina o **Valor Médio** de u sobre a esfera S_r de centro P e raio r por

$$m(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S_r} u \, dS.$$

a) Mostre que

$$m'(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{B_r} \Delta u \, dV,$$

onde B_r é a bola de centro P e raio r e $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ é o Laplaciano de u.

b) Prove que se $\Delta u = 0$, então $m(r) = u(P)$. Conclua que se P é ponto de máximo ou mínimo local de u e $\Delta u = 0$, então u é constante em qualquer bola de centro P e contida em Ω.

3ª Questão:

Seja $U \subset \mathbb{R}^3$ aberto, $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^2$, C^∞ com $Df(z)\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sobrejetiva, $\forall z \in U$. Prove que para todo compacto $K \subset U$, $|f|_K|$ (f restrito K) atinge seu máximo na fronteira de K.

4ª Questão:

a) Seja $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ de calsse C^1 no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Para algum $a \in U$, seja $f'(a)\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ um isomorfismo. Mostre que

$$\lim_{r \to 0} \frac{\mathrm{vol}\Big(f\big(B(a;r)\big)\Big)}{\mathrm{vol} B(a;r)} = |\det f'(a)|.$$

b) Se $f'(a)$ não é isomorfismo, prove que

$$\lim_{r \to 0} \frac{\mathrm{vol}\Big(f\big(B(a;r)\big)\Big)}{\mathrm{vol} B(a;r)} = 0.$$

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA

Exame de Cálculo Avançado

Setembro de 1991

1ª Questão:

Seja $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2. O ponto crítico $x_0 \in U$ diz-se *não degenerado* quando a forma bilinear $f''(x_0)$ é não singular, isto é, $f''(x_0)(u,v) = 0 \; \forall v \Rightarrow u = 0$.

Considere o caso $m = 2$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$ e seja $z_0 \in U$ um ponto crítico de f. Denote:

$$a = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(z_0), \quad b = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(z_0) \text{ e } c = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(z_0)$$

a) Exprima em termos de a, b e c a condição para que z_0 seja *não degenerado*.

b) Sendo z_0 não degenerado, obtenha condições adicionais para que z_0 seja um *máximo*, um *mínimo* ou um *ponto sela*.

2ª Questão:

Seja B a bola unitária de $\mathbb{R}^N$ e $F: B \longrightarrow B$ uma aplicação de classe C^1. Denote por $Df(x)$ a matriz Jacobiana de f no ponto $x \in B$. Suponha que existe $\lambda > 0$ tal que para todo $x \in B$, $\|Df(x) \cdot v\| \leq \lambda \|v\|$ $\forall v \in \mathbb{R}^N$. Prove que f satistaz:

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \lambda \|x - y\| \quad \forall x, y \in B.$$

3ª Questão:

Seja $\rho(x, y, t)$ a densidade, em um ponto (x, y) no tempo t, de um líquido que flui horizontalmente através de um cilindro cuja base é o disco $D = \big\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\big\}$ e sua altura é considerada desprezível.

Denotemos por $V(x, y, t) = \big(v_1(x, y, t), v_2(x, y, t)\big)$ a velocidade do fluído em $(x, y) \in D$, no tempo t.

Suponha ρ e V funções de classe C^1. A partir da equação

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho V) = 0, \tag{$*$}$$

válida para $(x, y, t) \in D \times [0, \infty)$, prove que:

$$\int\!\!\int_D \rho(x, y, t)\, dxdy \quad \text{é constante,}$$

sabendo-se que $V(x, y, t) = (x^2, 0)$ e $\rho(x, y, t) = 1$ para $(x, y, t) \in \partial D \times [0, \infty)$.

(Sugestão: Integre (*) no domínio D.)

4ª Questão:

Considere $f: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(\lambda, a, b, c) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c$. Mostre que existe $\delta > 0$ e que existem funções reais $\lambda_i(a, b, c)$, $i = 1, 2, 3$, de classe C^∞ no domínio

$$B_\delta = \big\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid \|(a, b, c) - (0, -1, 0)\| < \delta\big\},$$

tais que $\forall (a, b, c) \in B_\delta$, $f\big(\lambda_i(a, b, c), a, b, x\big) = 0$, $i = 1, 2, 3$ e $\lambda_1(a, b, c) < \lambda_2(a, b, c) < \lambda_3(a, b, c)$.

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA
Exame de Cálculo Avançado
Março de 1993

1ª Questão:

Considere $\mathbb{R}^{m^2}$ o espaço das matrizes reais $m \times m$. Mostre que existe uma vizinhança V da matriz identidade e uma aplicação $g: V \longrightarrow \mathbb{R}^{m^2}$ de classe C^∞, tal que $[g(Y)]^2 = Y$ para todo $Y \in V$.

2ª Questão:

Seja $f\colon [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua positiva e tal que $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_1^2 f(x)\,dx = 1$.

a) Prove que para cada $x \in [0,1]$ existe um único $y = g(x) \in [1,2]$ tal que $\int_x^y f(t)\,dt = 1$.

b) Prove que g é de classe C^1.

c) Construa uma sequência f_n nas hipóteses acima tal que a sequência g_n associada satisfaça: $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 1$ para todo $0 < x < 1$.

d) A convergência acima pode ser uniforme? Justifique.

3ª Questão:

Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ aberto, $D^2 = \big\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\big\} \subset U$. Seja $\varphi\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ função de classe C^∞ dada por $\varphi(z) = \big(f(z), g(z)\big)$, $z = (x,y) \in U$ e tal que $|\varphi(z)|^2 = 1\ \forall z \in U$.

a) Mostre que $f_x g_y - f_y g_x = 0\ \forall z \in U$.

b) Calcule $\int_{S^1} f\,dg - g\,df$, onde $S^1 = \partial D^2 = \big\{(x,y) \mid x^2+y^2 = 1\big\}$.

c) Conclua que *não* existe φ nas condições acima com $\varphi|_{S^1} =$ identidade.

4ª Questão:

Seja $f\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ talque $f(0) = 0$. Suponha que a sequência f_n definida por

$$f_n(x) = n f\Big(\frac{x}{n}\Big) \quad \text{para} \quad \frac{1}{2} \leq |x| \leq 1$$

converge uniformemente para uma transformação linear $L\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ na bola $\frac{1}{2} \leq |x| \leq 1$.

Prove que f é diferenciável em 0.

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA

Exame de Cálculo Avançado

Março de 1994

1ª Questão:

Prove que todas as normas de $\mathbb{R}^n$ são equivalentes.

2ª Questão:

Defina o que é uma forma diferenciável em $\mathbb{R}^n$. Defina a derivada exterior d. Mostre que $d(d\omega) = 0$ para toda forma diferenciável ω.

3ª Questão:

Seja $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 e tal que: $f(tx) = t^2 f(x)\ \forall t \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}^n$.
Mostre que: $f(x) = \frac{1}{2} D^2 f(0) \cdot x^2\ \forall x \in \mathbb{R}^n$.

4ª Questão:

Seja (f_n) a sequência de funções de $[-1, 1]$ definida por:

$$f_0(t) = 0$$
$$f_{n+1}(t) = f_n(t) + \frac{1}{2}\big(t^2 - f_n^2(t)\big)$$

Mostre que (f_n) converge uniformemente. Sugestão: $0 \le f_n(t) \le f_{n+1}(t) \le |t|$.

5ª Questão:

Enuncie e prove o Teorema da Aplicação Inversa. Assuma o:

> **Teorema (da Perturbação da Identidade).** *Seja $\phi\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma contração definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. A aplicação $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ dada por $f(x) = x + \phi(x)$ é um homeomorfismo de U sobre o conjunto aberto $f(U) \subset \mathbb{R}^m$. Além disso, se $U = \mathbb{R}^m$, tem-se $f(U) = \mathbb{R}^m$.*

6ª Questão:

Seja $\mathcal{D}$ o disco unitário de $\mathbb{R}^2$: $\mathcal{D} = \big\{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 1\big\}$. Suponha que $u\colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ é duas vezes continuamente diferenciável em $\mathcal{D}$.

a) Usando o Teorema de Stokes (ou o Teorema de Green), mostre que:

$$\iint_{\mathcal{D}} \det(Du(x))\, dx = \frac{1}{2} \oint_{\partial \mathcal{D}} \left(u_1 \frac{\partial u_2}{\partial \theta} - u_2 \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \right) ds$$

onde $Du = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$ é a derivada de u e ds é o comprimento de arco.

b) Se $u(x) = Mx = M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ na circunferência $|x| = 1$ (onde M é uma matriz 2×2 constante), use o item (a) para mostrar que:

$$\iint_{\mathcal{D}} \det(Du(x))\, dx = \pi \det M.$$

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA

Exame de Cálculo Avançado

Setembro de 1994

1ª Questão:

Considere $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = (x_1 x_2 \cdots x_n)^2$ e $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$. Mostre que $\exists y \in S$ tal que $F(y) = \max\{F(x) \mid x \in S\}$ e calcule-o. Utilize este resultado para deduzir a seguinte desigualdade, válida para números rais positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$$(a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

2ª Questão:

Seja $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$. Mostre que φ é injetiva $\iff \exists k > 0$ tal que $\|\varphi(x)\| \geq k\|x\|$, $\forall x \in \mathbb{R}^m$.

3ª Questão:

Seja $u \in C^1(0, L)$ tal que $u(0) = u(L) = 0$. Mostre que $|u(x)| \leq \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^L |u'(s)|\, ds$.

4ª Questão:

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^3$ aberto e $f\colon U \to \mathbb{R}^4$ função de classe C^1. Suponha $x_0 \in U$ tal que $Df(x_0)$ seja injetiva. Prove que existe uma vizinhança V de $f(x_0)$ e um difeomorfismo $\phi\colon V \to \phi(V) \subseteq \mathbb{R}^4$ tal que $(\phi \circ f)(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3, 0)$.

5ª Questão:

Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ domínio de classe C^2 e $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$, $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, satisfazendo

$$\begin{cases} -\Delta u + u \geq 0 \text{ em } \Omega \\ \qquad\quad u \geq 0 \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{$*$}$$

Mostre que $u(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega$.

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA

Exame de Cálculo Avançado

Março de 1995

1ª Questão:

Considere o problema de valor inicial

$$(1) \qquad \begin{cases} x' = g(t,x) \quad \text{com} \quad x(t_0) = x_0 \\ y' = f(t,x)y \quad \text{com} \quad y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

onde:

a) $g\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, limitada e lipschitziana na segunda variável, isto é, $|g(t,x_1) - g(t,x_2)| \le k\|x_1 - x_2\|$, $k > 0$,

b) $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e limitada.

Mostre que o sistema (1) possui uma única solução em $\mathbb{R}$.

2ª Questão:

Seja $f\colon \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$, f de classe C^2 e x_0 um ponto crítico não degenerado, isto é,

$$\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\right) \neq 0.$$

Mostre que existe uma vizinhança $V(x_0)$ que não contém outro ponto crítico de f.

3ª Questão:

Considere $f\colon \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$, f de classe C^1 tal que $f(x/2) = f(x)/2$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$. Mostre que f é linear.

4ª Questão:

Seja S um subconjunto convexo de $\mathbb{R}^N$ e $d = \inf_{x\in S} \|x\|_2$. Se $x_n \in S$ e $\|x_n\|_2 \to d$ quando $n \to \infty$, mostre que x_n é uma sequência de Cauchy.

(Sugestão: Regra do paralelogramo: $\|x+y\|_2^2 + \|x-y\|_2^2 = 2\|x\|_2^2 + 2\|y\|_2^2$.)

5ª Questão:

a) Deduza do Teorema da Divergência a 2ª Identidade de Green:

$$\int_\Omega \Delta u\, v - \Delta v\, u = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} v - \frac{\partial v}{\partial \nu} u.$$

b) Conclua que se u é harmônica, então $\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$.

c) Seja $B_r = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| \le r\}$ e $\Omega_\varepsilon = B_r \setminus B_\varepsilon$, $0 < \varepsilon < r$.
Considere $v = \frac{1}{\|x\|}$ e faça $\varepsilon \to 0$ em b) para obter o teorema da média:

$$\Delta u = 0 \Rightarrow u(0) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B_r} u\, dS.$$

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA

Exame de Cálculo Avançado

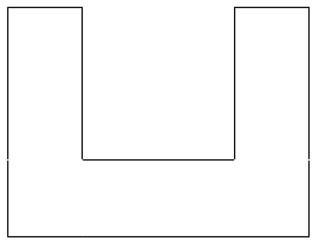
Setembro de 1995

$1^{\underline{a}}$ Questão:

Seja $E \subset \mathbb{R}^2$ aberto, convexo e $f\colon E \to \mathbb{R}$.

(i) Mostre que se $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \equiv 0$ então f não depende de x.

(ii) Mostre que (i) não se aplica se E é um conjunto da forma abaixo.



$2^{\underline{a}}$ Questão:

Seja $I = \{x \in \mathbb{R}\,;\, 0 < x < 1\}$ e $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x = 0 \text{ ou } y = 0\}$. Mostre que I não é difeomorfo a V.

$3^{\underline{a}}$ Questão:

Seja $\mathcal{M}$ o espaço das matrizes quadradas de ordem n, munido da topologia do $\mathbb{R}^{n^2}$. Seja D o conjunto das matrizes de determinante unitário.

(i) Mostre que D é fechado.

(ii) Mostre que $\mathcal{M}/D$ não é conexo.

$4^{\underline{a}}$ Questão:

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto de fronteira Γ regular, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ uma função. Suponha $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ satisfazendo

$$\begin{cases} -a\Delta u = f & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \Gamma \end{cases}$$

onde $a > 0$ é um parâmetro a determinar a partir do conhecimento de $g = \frac{\partial u}{\partial \nu}|_\Gamma$, a derivada normal de u em Γ.

(i) Use o teorema da divergência para obter a identidade

$$\int_\Omega \Delta u v - \Delta v u = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} v - \frac{\partial v}{\partial \nu} u,$$

para $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$.

(ii) Suponha $g \neq 0$ e que exista $v \in C^2(\overline{\Omega})$ satisfazendo

$$\begin{cases} -\Delta v = 0 & \text{em } \Omega \\ v = g & \text{em } \Gamma \end{cases}$$

Mostre que g determina $a > 0$ univocamente.

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA
Exame de Cálculo Avançado
Março de 1996

$1^{\underline{a}}$ Questão:

Considere o conjunto $\mathcal{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, y = \operatorname{sen} 1/x\,,\, x > 0\}$.

(a) Caracterize $\overline{\mathcal{A}} \setminus \mathcal{A}$.

(b) Mostre que $\overline{\mathcal{A}}$ é conexo.

(c) Mostre que $\overline{\mathcal{A}}$ não é localmente conexo.

(d) Investigue se $\overline{\mathcal{A}}$ é ou não conexo por caminhos, justificando seu raciocínio.

$2^{\underline{a}}$ Questão:

Seja $\mathcal{U} = C^1[0,1]$.

(a) Investigue a convergência da sequência $f_n(x) = x^n$, $n \geq 1$ com respeito às normas

$$\|f\|_1 = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \qquad \text{e} \qquad \|f\|_2 = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |\frac{df}{dx}(x)|$$

(b) Investigue a convergência da sequência

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, 1/2 - 1/n] \cup [1/2 + 1/n, 1] \\ nx - \frac{n-2}{2} & \text{se } x \in [1/2 - 1/n, 1/2] \\ -nx + \frac{n+2}{2} & \text{se } x \in [1/2, 1/2 + 1/n] \end{cases}$$

para $n \geq 2$, com respeito às normas

$$\|f\|_1 = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \qquad \text{e} \qquad \|f\|_2 = \left(\int_0^1 f(x)^2\,dx\right)^{1/2}$$

$3^{\underline{a}}$ Questão:

Seja $\mathcal{U}$ um espaço vetorial com uma norma induzida pelo produto interno, isto é:

$$\|u\| = \sqrt{\langle u\,;\, u\rangle}, \;\; \forall u \in \mathcal{U}$$

Seja $G{:}\,\mathcal{U} \to \mathbb{R}$. Diz-se que G tem derivada em u na direção v se existe $G'{:}\,\mathcal{U} \to \mathcal{U}$, tal que

$$\langle G'(u)\,;\, v\rangle = \lim_{\delta\to 0} \frac{G(u+\delta v) - G(u)}{\delta}$$

Considere um conjunto $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ e um funcional $F\colon \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ que atinge seu mínimo em $\mathcal{K}$, isto é, $\exists u \in \mathcal{K}$ tal que $F(u) \leq F(v)$, $\forall v \in \mathcal{K}$.

(a) Mostre que a seguinte caracterização é válida:

$$\langle F'(u)\,;\, v-u\rangle \geq 0, \ \ \forall v \in \mathcal{K}.$$

(b) Discuta o caso em que $\mathcal{K} = \mathcal{U}$.

(c) Para cada $u \in \mathcal{U}$, considere $F\colon \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ dado por

$$F(v) = \frac{1}{2}\|u-v\|^2.$$

Quando $\mathcal{K}$ é fechado, este funcional atinge seu mínimo em $\mathcal{K}$ no ponto P_u que é a projeção de u sobre o convexo $\mathcal{K}$.

Demonstre a afirmação acima para o caso particualr em que $\mathcal{U}$ tem dimensão finita e $\mathcal{K}$ é um hipercubo fechado de $\mathcal{U}$.

(d) De volta ao caso geral, mostre que é valida a caracterização:

$$\langle P_u\,;\, v-P_u\rangle \geq \langle u\,;\, v-P_u\rangle \ \ \forall v \in \mathcal{K}.$$

(e) Discuta o caso $\mathcal{K} = \mathcal{U}$.

4ª Questão:

Seja $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ um campo vetorial definido numa região simplesmente conexa de $\mathbb{R}^3$. Mostre que $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ é potencial se e somente se $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ é irrotacional.

5ª Questão:

Considere o campo vetorial $\overrightarrow{F}\colon \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = \left(\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\right)^{3/2}(x,y,z)$$

e a superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1, z > 0\}$$

orientada por sua normal exterior. Calcule o fluxo de $\overrightarrow{F}$ ao “longo” de S, isto é:

$$\int_S \overrightarrow{F} \cdot d\vec{s}$$

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA

Exame de Cálculo Avançado

Setembro de 1996

$1^{\underline{a}}$ Questão:

Sejam $p > 1$ e $q > 1$ tais que $1/p + 1/q = 1$.

(a) Determine o mínimo de $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^p/p + y^q/q$ quando $xy = 1$;

(b) Mostre que se a e b são não-negativos então $ab \le a^p/p + b^q/q$;

(c) Se a_i, b_i, $i = 1, \ldots, n$ são números reais não-negativos, demonstre a desigualdade de Hölder:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}$$

$2^{\underline{a}}$ Questão:

Seja $\psi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 tal que $\Delta\psi + h = 0$, onde $h\colon \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é de classe C^2 e se anula em $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$. Suponha satisfeitas as seguintes condições:

$$\lim_{|\vec{r}\,| \to \infty} |\psi(\vec{r}\,)| = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{|\vec{r}\,| \to \infty} |\nabla\psi(\vec{r}\,)||\vec{r}\,| = 0$$

onde $|\vec{r}\,| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$. Use a segunda identidade de Green para mostrar que

$$\psi(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{h(\vec{r}\,)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}\, dV$$

$3^{\underline{a}}$ Questão:

Seja V um espaço vetorial com norma induzida pelo produto interno, isto é, $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$, $\forall u \in V$ e $J\colon V \to \mathbb{R}$ uma função G-diferenciável em $u \in V$, isto é, existe $J'\colon V \to V$ tal que

$$\langle J'(u), v\rangle = \lim_{\delta \to 0} \frac{J(u + \delta v) - J(u)}{\delta} \in \mathbb{R}, \quad \forall v \in V.$$

Mostre que as duas afirmações abaixo são equivalentes:

(a) J é convexa em V;

(b) $J(v) \ge J(u) + \langle J'(u), v - u\rangle, \quad \forall u, v \in V$.

4ª Questão:

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um aberto e $T > 0$ um número real.

(a) Considere as seguintes funções de classe C^1:

$$\begin{array}{rcl} \rho\colon \Omega \times [0,T] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\vec{r},t) & \mapsto & \rho(\vec{r},t) \end{array} \qquad \text{(densidade de carga elétrica)}$$

$$\begin{array}{rcl} \vec{\jmath}\colon \Omega \times [0,T] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\vec{r},t) & \mapsto & \vec{\jmath}(\vec{r},t) \end{array} \qquad \text{(densidade de corrente elétrica)}$$

onde $\vec{r} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Se $B \subset \Omega$ é compacto arbitrariamente fixado, defina

$$\begin{cases} Q\colon [0,T] \to \mathbb{R} & \text{por } Q(t) = \int_B \rho(\vec{r},t)\, dV \quad \text{(carga elétrica em } B\text{)} \\ i\colon [0,T] \to \mathbb{R} & \text{por } i(t) = \int_B \vec{\jmath}(\vec{r},t) \cdot d\vec{S} \quad \text{(corrente elétrica através de } \partial B\text{)} \end{cases}$$

Estabeleça o princípio da conservação da carga elétrica:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{\jmath} = 0.$$

(b) Suponha que

$$\vec{E},\ \vec{B}\colon \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^3$$

sejam campos vetoriais de classe C^2 satisfazendo

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \qquad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Mostre que existem $\Phi\colon \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ e $\vec{A}\colon \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^3$ tais que

$$\vec{E} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA
Exame de Cálculo Avançado
Março de 1997

1ª Questão:

Seja f uma função de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ tal que:

(a) Para todo $y_0 \in \mathbb{R}$, $f(x, y_0)$ é contínua.

(b) Para todo $x_0 \in \mathbb{R}$, $f(x_0, y)$ é contínua.

(c) f leva compactos em compactos.

Mostre que f é contínua.

2ª Questão:

Mostre que nas coordenadas esféricas $X(r,\phi,\theta) = (r\cos\phi \operatorname{sen}\theta, r\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, r\cos\theta)$ o laplaciano de U se escreve:

$$\Delta U = \frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\operatorname{sen}\theta\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial U}{\partial\phi}\right)\right)$$

Dica: Usando o Segundo Teorema de Green, calcule a integral de ΔU na região

$$r_1 < r < r_2, \quad \phi_1 < \phi < \phi_2, \quad \theta_1 < \theta < \theta_2.$$

3ª Questão:

Seja $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ tal que $f(0) = 0$. Suponha que a sequência f_n definida por

$$f_n(x) = nf(\frac{x}{n}), \quad \text{para} \quad \frac{1}{2} \leq |x| \leq 1$$

converge uniformemente para uma transformação linear $L\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ na região $\frac{1}{2} \leq |x| \leq 1$.

Prove que f é derivável em 0.

4ª Questão:

Mostre que a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \exp\colon \mathcal{L}(\mathbb{R}^m) & \to & \mathcal{L}(\mathbb{R}^m) \\ A & \mapsto & \exp A = I + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots \end{array}$$

transforma difeomorficamente uma vizinhança de 0 em uma vizinhança da aplicação identidade $I \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$. Use este fato para definir o log de uma matriz na vizinhança de I.

5ª Questão:

Se $M = \mathbb{R}^m \setminus V$, onde V é uma união finita de subespaços de qualquer dimensão, definimos Z^k como o conjunto das k-formas ω tais que $d\omega = 0$. Definimos como B^k o conjunto das k-formas ω tais que $\omega = d\eta$ para alguma $(k-1)$-forma η.

O k-ésimo grupo de cohomologia é definido como o quociente

$$H^k = \frac{Z^k}{B^k}$$

Mostre que se existe um difeomorfismo (i.e., uma bijeção diferenciável com inversa diferenciável) entre regiões M e N, então $H^k(M)$ é isomorfo a $H^k(N)$.

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA

Exame de Cálculo Avançado

Setembro de 1997

$1^{\underline{a}}$ Questão:

(a) Uma função $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é dita convexa se para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $t \in [0,1]$ vale

$$f\big(x + (1-t)y\big) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \tag{1}$$

Seja f diferenciável em $\mathbb{R}^n$. Prove que f é convexa se e somente

$$f(x) \geq f(x_0) + df(x_0) \cdot (x - x_0), \tag{2}$$

para todo $x, x_0 \in \mathbb{R}^n$. (Sugestão: ($\Rightarrow$) Use (1) e a definição de função diferenciável em x_0. ($\Leftarrow$) Considere dois pontos $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, $x_1 \neq x_2$, e aplique (2) duas vezes, uma para cada um desses pontos, tomando x_0 em ambos os casos como sendo um ponto do segmento de reta que liga x_1 a x_0.)

(b) Um conjunto K é convexo se dados $x, y \in K$, então $tx + (1-t)y \in K$, para todo $t \in [0,1]$. Mostre que se f é diferenciável e convexa em um aberto convexo A e $x_0 \in A$ é ponto crítico então f tem um mínimo absoluto em x_0. (Sugestão: use (a)).

(c) Para f e A como no item anterior, prove que o conjunto $K = \{x \in A; df(x) = 0\}$ é convexo.

$2^{\underline{a}}$ Questão:

Sejam $f, g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ dadas por $f(\vec{u}) = y^2 + w^2 - 2xz$ e $g(\vec{u}) = y^3 + w^3 + x^3 - z^3$, $\vec{u} = (x, y, z, w)$, e considere $F = (f, g)\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$.

(a) Mostre que há duas funções escalares $\varphi = \varphi(y, w)$ e $\psi = \psi(y, w)$ definidas em uma vizinhança V de $(-1, 1)$ com $\varphi(-1, 1) = 1$ e $\psi(-1, 1) = 1$ tais que

$$F\big(\varphi(y, w), y, \psi(y, w), w\big) = (0, 0), \quad \forall (y, w) \in V$$

(b) Calcule as derivadas parciais de primeira ordem de φ e ψ em $(-1, 1)$.

$3^{\underline{a}}$ Questão:

Seja $S_n(a)$ o seguinte conjunto em $\mathbb{R}^n$, onde $a > 0$:

$$S_n(a) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n); |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \leq a\}.$$

Seja $V_n(a)$ o volume de $S_n(a)$.

(a) Prove que $V_n(a) = a^n V_n(1)$.

(b) Para $n \geq 2$, mostre que $V_n(1) = 2V_{n-1}(1)/n$.

(c) Deduza que $V_n(a) = 2^n a^n / n!$.

4ª Questão:

Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções contínuas em $\mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$, convergindo uniformemente para uma função f em um aberto limitado $A \subset \mathbb{R}^N$. Seja $\{u_n\}$ uma sequência de funções de classe C^2 satisfazendo

$$\Delta u_n(x) = f_n(x), \qquad \forall x \in A.$$

e seja u uma função de classe C^2 em A satisfazendo

$$\Delta u(x) = f(x), \qquad \forall x \in A.$$

Mostre que, para todo $a \in A$,

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{t\to 0} \frac{1}{|B(a,t)|} \int_{\partial B(a,t)} \frac{\partial u_n}{\partial \nu}\, dS = \lim_{t\to 0} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|B(a,t)|} \int_{\partial B(a,t)} \frac{\partial u_n}{\partial \nu}\, dS,$$

onde $B(a,t) = \{x \in \mathbb{R}^N; |x-a| < t\}$ e $\partial u/\partial \nu = \nabla u \cdot \nu$, sendo ν a normal unitária exterior a $\partial B(a,t)$.

5ª Questão:

Seja $f(\vec{u}) = x_1 x_2 \dots x_n$ e $M = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^n; x_1 + \cdots + x_n = 1, x_i > 0 \text{ para } i = 1, \dots, n\}$, onde $\vec{u} = (x_1, \dots, x_n)$

(a) Mostre que $f(\vec{u}) \leq n^{-n}$ para todo $\vec{u} \in M$.

(b) Usando (a), prove que a média geométrica de n números positivos é sempre menor ou igual à média aritmética dos mesmos.

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA
Exame de Cálculo Avançado
Março de 1998

1ª Questão:

Seja $B = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\,;\, x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ a bola unitária em $\mathbb{R}^2$ e $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in B, \\ 0 & \text{se } x \notin B. \end{cases}$$

Demonstre que f é Riemann integrável em $\mathbb{R}^2$.

2ª Questão:

Determine os máximos e mínimos da função $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3$ quando restrita ao conjunto $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

$3^{\underline{a}}$ Questão:

Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Mostre que f não é injetora.

$4^{\underline{a}}$ Questão:

Seja V um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$ de fronteira S regular, ν o vetor unitário exterior a S, f e g duas funções de classe $C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

(a) Mostre a primeira identidade de Green:

$$\int_S (f\nabla g)_\nu \, ds = \int_V (f\Delta g + \nabla f \nabla g) \, dV,$$

onde $(f\nabla g)_\nu$ denota a projeção de $f\nabla g$ sobre ν.

(b) Mostre a segunda identidade de Green:

$$\int_S (f\frac{\partial f}{\partial \nu} - g\frac{\partial g}{\partial \nu}) \, ds = \int_V (f\Delta g - g\Delta f) \, dV$$

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA
Exame de Cálculo Avançado
Setembro de 1998

$1^{\underline{a}}$ Questão:

Considere a forma quadrática $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$, com a, b e c não nulos.

(a) Mostre que o sistema de equações

$$\begin{cases} ax & + \; by & = \lambda x \\ bx & + \; cy & = \lambda y \\ x^2 & + \; y^2 & = 1 \end{cases}$$

em (x, y, λ) possui pelo menos duas soluções.

(b) Considere (x_1, y_1, λ_1) e (x_2, y_2, λ_2), soluções de $(*)$. Mostre que se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então os vetores $\vec{v}_1 = (x_1, y_1)$ e $\vec{v}_2 = (x_2, y_2)$ são ortogonais.

(c) Mostre que se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então em relação à base de $\mathbb{R}^2$ formada pelos vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ obtidos no item (b), a forma quadrática $f = f(x, y)$ pode ser expressa na forma

$$f(x, y) = \lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2, \quad \text{para} \quad (x, y) = \xi \vec{v}_1 + \eta \vec{v}_2.$$

2ª Questão:

Seja $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 com $|f'(x)| \leq \theta < 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Mostre que f possui um e somente um ponto fixo em $\mathbb{R}$. (Sugestão: considere a sequência $x_n = f(x_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$, x_0 arbitrário.)

3ª Questão:

Seja $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\; ; \;\; 0 < y < R\}$, onde $R > 0$, e considere o conjunto de funções

$$\mathbb{D} = \{u \in C^1(\overline{\Omega});\; u(x,0) = 0,\; \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

Seja, ainda, $p > 1$.

(a) Demonstre, utilizando a desigualdade de Hölder, que existe uma constante positiva c_1 tal que para qualquer função $u \in \mathbb{D}$,

$$|u(x,y)| \leq c_1 \left(\int_0^R |u_y(x,\eta)|^p \, d\eta \right)^{1/p}, \qquad \forall (x,y) \in \overline{\Omega}.$$

(b) Mostre que existe uma constante c_2 tal que para qualquer $u \in \mathbb{D}$,

$$\int_\Omega |u(x,y)|^p \, dxdy \leq c_2 \int_\Omega |u_y(x,y)|^p \, dxdy.$$

4ª Questão:

Seja $n \in \mathbb{N}$ e seja $\|\cdot\|$ a norma Euclidiana em $\mathbb{R}^n$.

(a) Mostre que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{x^2} \, dx = \sqrt{\pi}$.

(b) Mostre que $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2} \, dx = \pi^{n/2}$.

(c) Mostre que $(4\pi t)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2/4t} dx = 1$, $\forall t > 0$.

(d) Seja $K(t,x) = (4\pi t)^{-n/2} e^{-\|x\|^2/4t}$. Mostre que $K_t = \Delta K$ para todo $t > 0$ e todo $x \in \mathbb{R}^n$.

5ª Questão:

(a) Enuncie o Teorema da Divergência.

(b) Mostre que $\nabla \cdot (u \nabla v) = u \Delta v + \nabla u \cdot \nabla v$.

(c) Mostre que

$$\int_\Omega [u\Delta v - v\Delta u] \, dx = \int_{\partial\Omega} \left[u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial}{\partial \nu} \right] \, d\sigma.$$

(d) Seja $\{u_m\}_m$ uma sequência de funções harmônicas em um aberto Ω de $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Suponha que $\nabla u_m \longrightarrow \nabla u$ uniformemente em todo subconjunto compacto de Ω, onde u é de classe C^2 em Ω. Mostre que u é harmônica.

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA

Exame de Cálculo Avançado

Março de 1999

$1^{\underline{a}}$ Questão:

Seja $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continuamente diferenciável tal que $|Dg(x)| \leq \lambda$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, onde $0 < \lambda < 1$. Mostre que $f(x) = x + g(x)$ é um homeomorfismo de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$.

$2^{\underline{a}}$ Questão:

Considere um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ com fronteira regular $\partial\Omega$.

(a) Use o teorema da divergência para obter a identidade

$$\int_\Omega \{v\Delta u - u\Delta v\} = \int_{\partial\Omega} \left\{ v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu} \right\},$$

para $u, v \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, onde $\partial/\partial\nu$ indica a derivada normal em $\partial\Omega$.

(b) Sejam $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ e $u\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{cases} -a\Delta u = f, \text{ em } \Omega, \\ \quad\; u = 0, \text{ em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $a > 0$ é um parâmetro a ser determinado em função do conhecimento da derivada normal $g = \partial u/\partial\nu|_{\partial\Omega}$ em $\partial\Omega$.

Suponha que $g \neq 0$ e que exista $v \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta v = 0, \text{ em } \Omega, \\ \quad\; v = g, \text{ em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Mostre que g determina a univocamente.

$3^{\underline{a}}$ Questão:

Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = x^2y^2 + e^{-(x^2+y^2)}$$

e considere

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\, f(x, y) = 1\}.$$

(a) Mostre que C é uma curva (isto é, que em uma vizinhança de cada um de seus pontos, C é o gráfico de uma função).

(b) Mostre que C não é conexa.

4ª Questão:

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um aberto limitado e seja $f\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ contínua e de classe $\mathcal{C}^1$ em Ω. Suponha que $Df(x)\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ seja sobrejetiva para todo $x \in \Omega$. Mostre que todo ponto de máximo de $|f|$ pertence à fronteira de Ω.

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA

Exame de Cálculo Avançado

Setembro de 1999

1ª Questão:

Considere $f\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e $r > 0$.

a) Suponha que $N = 2$. Mostre que exists $x \in \mathbb{R}^N$ com $|x| = r$ tal que $f(x) = f(-x)$.

b) Mostre que se $N > 2$ existem infinitos valores de x com $|x| = r$ que satisfazem $f(x) = f(-x)$.

2ª Questão:

Considere $g\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $g \in C^1(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo a seguinte propriedade:

$$\nabla g(x) \cdot x > 0, \ \forall x, \ \text{tal que} \ \ |x| = 1.$$

Mostre que existe $x_0 \in B_1(0)$ tal que $\nabla g(x_0) = 0$.

3ª Questão:

Seja $u(x,t) \in C^2(\mathbb{R}^2)$ tal que o campo de vetores $F(x,t) = (-u_x(x,t), u_t(x,t))$ satisfaça a $\operatorname{div} F(x,t) = 0$, $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2$. Considere os pontos $B = (x-t, 0)$ e $C = (x+t, 0)$. Mostre que o valor da função u em um ponto (x,t) depende unicamente dos valores de u e u_t no intervalo $[x-t, x+t]$.

4ª Questão:

A intensidade do campo eletrostático $\vec{\mathcal{E}}$ provocado por uma carga pontual q situada na origem de um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais x, y, z é dado por

$$\vec{\mathcal{E}} = \frac{q}{r^3}\vec{r},$$

onde $\vec{r}$ é o vetor posição do ponto em que está sendo registrado o valor do campo.

a) Determine o fluxo do vetor $\vec{\mathcal{E}}$ através de qualquer superfície fechada S, que **não** contenha a carga no interior do volume por ela limitado.

b) Determine o fluxo no caso em que a superfície S contenha a carga no interior do volume por ela limitado.

5ª Questão:

Considere uma função lipschitz contínua $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e seja $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $C^1(\mathbb{R})$ tal que y é solução de

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)) \\ y(0) &= y_0 \end{aligned} \qquad (*)$$

a) Mostre que y é solução da equação integral

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(t, y(s))ds.$$

Reciprocamente, seja y de classe C^1 solução de $y(t) = y_0 + \int_0^t f(t, y(s))ds$.

b) Mostre que y é solução de

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)) \\ y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

c) Mostre que se $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ existe uma única solução y de (*) definida em $[0, t_0]$ para t_0 suficientemente pequeno.

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA

Exame de Cálculo Avançado

Março de 2000

1ª Questão:

Calcule os valores máximo e mínimo de $f(x, y) = x^3 + y^3$ sobre a elipse $2x^2 + 3y^2 = 1$.

2ª Questão:

Considere $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ o campo definido por

$$f(x) = \frac{x}{\|x\|_2^2},$$

onde $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ é a norma euclidiana de $\mathbb{R}^2$. Considere as curvas

$$\begin{aligned} S_1 &= \big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\,;\, x_1^2 + x_2^2 = 1\big\}, \\ S_2 &= \big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\,;\, (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 = 1/4\big\}. \end{aligned}$$

Para $i = 1, 2$, calcule $\int_{S_i} f \cdot d\gamma$, o fluxo de f sobre S_i.

3ª Questão:

Seja $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ a norma euclidiana de $\mathbb{R}^n$ e $B_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, \|x\|_2 \leq 1\}$ a bola unitária.

a) Para que valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ é finita a integral

$$\int_{B_1} \|x\|_2^\alpha \, dx?$$

b) Seja $\|x\|_p = \big(|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p\big)^{1/p}$, $p \geq 1$, a norma p de $\mathbb{R}^n$. Para que valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ é finita a integral

$$\int_{B_1} \|x\|_p^\alpha \, dx?$$

Justifique suas respostas.

4ª Questão:

a) Enuncie o Teorema da Função Inversa;

b) Assumindo a validade do Teorema da Função Implícita, demonstre o Teorema da Função Inversa.

Sugestão: Dada $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, considere $g\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $g(x, y) = y - f(x)$.

5ª Questão:

Seja $f\colon [0, 2] \to \mathbb{R}$ função positiva e contínua tal que

$$\int_0^1 f(t)\, dt = \int_1^2 f(t)\, dt = 1.$$

a) Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que para todo $x \in [0, 1]$ existe um único $y = \varphi(x) \in [1, 2]$ tal que

$$\int_x^y f(t)\, dt = 1.$$

b) Use o Teorema da Função Implícita para mostrar que a função $y = \varphi(x)$ definida em (a) é de classe C^1.

c) Sabendo que $f(1/2) = 2$, $f(3/2) = 3$ e $\varphi(1/2) = 3/2$, calcule $\varphi'(1/2)$.

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA

Exame de Cálculo Avançado

Setembro de 2000

$1^{\underline{a}}$ Questão:

Seja $I = [a, b]$ um intervalo fechado e limitado em $\mathbb{R}$ e $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ contínua, continuamente derivável em (a, b), com $f(a) = a$, $f(b) = b$. Mostre que existem dois pontos $a < x_1 < x_2 < b$ tais que

$$\frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} = 2.$$

Considere a_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, números reais distintos e $p(x) = \prod_{i=1}^{5}(x - a_i)$. Considere ainda o problema

$$p(x) = \gamma, \qquad (P_\gamma)$$

que depende de um parâmetro real γ. Defina

$$\Gamma = \{\gamma \in \mathbb{R}, (P_\gamma) \text{tem 5 soluções distintas}\}.$$

Evidentemente, $0 \in \Gamma$.

i) Mostre que (P_γ) só tem uma solução se $|\gamma|$ é suficientemente grande e que, portanto, Γ é limitado.

ii) Use o Teorema da Função Implícita para mostrar que Γ é aberto.

$3^{\underline{a}}$ Questão:

Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma isometria, isto é, $|f(x) - f(y)| = |x - y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

i) Suponha que f seja de classe C^1. Mostre que $f(x)$ é da forma $x + a$ ou $-x + a$.

ii) Demonstre (i) sem nenhuma hipótese sobtre a derivabilidade de f. (Sugestão: não tente mostrar que f é diferenciável.)

$4^{\underline{a}}$ Questão:

Seja A uma matriz $n \times n$ simétrica e $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $f(x) = (Ax, x)$, onde $(.,.)$ denota o produto escalar usual de $\mathbb{R}^n$. Seja ainda $S = \{x \in \mathbb{R}^n, (x, x) = 1\}$ a esfera unitária centrada na origem.

i) Mostre que f é derivável em todos os pontos e que $f'(x) = 2Ax$.

ii) Mostre que existe $u_1 \in S$ tal que $f(u_1) = \min_{u \in S} f(u)$. Mostre que u_1 é autovetor de A, associado a $\lambda_1 = f(u_1)$.

iii) Seja $S_2 = \{u \in S, (u, u_1) = 0\}$. Mostre que existe $u_2 \in S_2$ tal que $f(u_2) = \min_{u \in S_2} f(u)$. Mostre que u_2 é autovetor de A, associado a $\lambda_2 = f(u_2)$.

iv) Iterando o argumento descrito acima, demonstre o Teorema Espectral no caso real, isto é, que uma matriz simétrica possui uma base ortonormal de autovetores.

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA
Exame de Cálculo Avançado
Fevereiro de 2001

$1^{\underline{a}}$ Questão:

Determine e classifique os pontos críticos da função $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = x^4 + y^4 + x^2 + \alpha y^2 - 6x, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

$2^{\underline{a}}$ Questão:

Seja $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, uma função de classe C^1 e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ subconjunto aberto, limitado e convexo tais que

$$0 \in \Omega \quad \text{e} \quad \nabla f(x) \cdot \eta(x) < 0, \quad \forall x \in \partial\Omega,$$

onde $\eta(x)$ denota o vetor unitário normal exterior a Ω em $x \in \partial\Omega$.

1) Mostre que existe $x_0 \in \Omega$ tal que $\nabla f(x_0) = 0$.
2) Mostre qua 1) é falso se Ω é não limitado.

$3^{\underline{a}}$ Questão:

Seja $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ função contínua e $R \subset \mathbb{R}^2$ o triângulo com vérticies em $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$. Mostre que

$$\iint_R f(x+y)\,dxdy = \int_0^1 \xi f(\xi)\,d\xi.$$

$4^{\underline{a}}$ Questão:

Seja $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ função de classe C^2 tal que $\nabla\varphi(x) \cdot x = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^3$ tal que $|x| = 2$. Calcule

$$\int_{\{|x| \leq 2\}} \Delta\varphi(x)\,dx.$$

$5^{\underline{a}}$ Questão:

Seja $\mathcal{P}_3$ o espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a 3, isto é:

$$\mathcal{P}_3 = \big\{p\,;\, p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}\big\}.$$

1) Para $p \in \mathcal{P}_3$, seja $\|p\| = |a| + |b| + |c| + |d|$. Mostre que $\|p\|$ define uma norma em $\mathcal{P}_3$.
2) Seja $\mathcal{S} = \{p \in \mathcal{P}_3\,;\; a = 1 \text{ e } p \text{ possui três raízes reais e distintas}\}$. Mostre que $p(x) = x^3$ é ponto de acumulação de $\mathcal{S}$ mas não pertence a $\mathcal{S}$.
3) Seja $\Omega = \{(b,c,d) \in \mathbb{R}^3\,;\, p(x) = x^3 + bx^2 + cx + d \in \mathcal{S}\}$. Mostre que Ω é aberto em $\mathbb{R}^3$ e que a aplicação $\Lambda\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ definida por $(b,c,d) \in \Omega \mapsto (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, onde λ_i é raíz de p é diferenciável. (Sug.: use o Teorema da Função Inversa)

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA

Exame de Cálculo Avançado

Dezembro de 2001

$1^{\underline{a}}$ Questão:

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Seja $f: U \times [a,b] \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k. Mostre que a função $g: U \to \mathbb{R}^n$ definida por $g(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt$ é de classe C^k.

$2^{\underline{a}}$ Questão:

Sejam $f, g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funções de classe C^1. Suponha que o conjunto $S = \{x \in \mathbb{R}\,;\, g(x) = 0\}$ é não vazio e considere o problema de minimização com restrição

$$\min_{x \in S} f(x). \tag{M}$$

Seja x_m um ponto de mínimo local de (M) e suponha que $g'(x_m) \neq 0$. Use o Teorema da Função Implícita para mostrar que existe (um multiplicador de Lagrange) $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $f'(x_m) = \lambda g'(x_m)$.

$3^{\underline{a}}$ Questão:

Seja $n \in \mathbb{N}$, $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ e $p: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$p(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \mathrm{e}^{-\frac{\|x-\overline{x}\|^2}{2}}, \tag{1}$$

onde $\|\cdot\|$ é a norma euclidiana usual. Definimos uma função de probabilidade (dita normaL) em $\mathbb{R}^n$ dizendo que a probabilidade associada a uma região (suave) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é dada por $\int_\Omega p(x)\,dx$.

(i) Considere o caso $n = 2$, $\overline{x} = 0$ e use coordenadas polares para mostrar que $\int_{\mathbb{R}^n} p(x)\,dx = 1$ (a probabilidade total é igual a 1). Obtenha o mesmo resultado para $\overline{x}$ qualquer.

(ii) Use (i) para mostrar que $\int_{\mathbb{R}^n} p(x)\,dx = 1$ vale para $n = 1$.

(iii) O valor esperado E associado a uma função de probabilidade p é definido por $E = \int_{\mathbb{R}^n} xp(x)\,dx$. Mostre que se $n = 1$ e p é dada por (1), então $E = \overline{x}$.

(iv) Mostre que (ii) e (iii) vale para $n \in \mathbb{N}$ qualquer.

$4^{\underline{a}}$ Questão:

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto de fronteira regualar S. Dados $f: U \to \mathbb{R}$ e $g: S \to \mathbb{R}$ funções contínuas, considere o problema de Neumann que consiste em determinar $u: \overline{U} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 em U tal que

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ em } U, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = g \text{ em } S, \end{cases} \tag{N}$$

onde η é o vetor normal unitário definido sobre S e exterior a U.

Use o Teorema de Gauss para mostrar que nem sempre (N) tem solução.

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA

Exame de Cálculo Avançado

Dezembro de 2002

1ª Questão:

Mostre que

a) $\max\left\{x+y+z \,|\, x^4+y^4+z^4=1\right\} = 3\cdot 3^{-1/4}$.

b) $\max\left\{xyz \,|\, x^4+y^4+z^4=1\right\} = 3^{-3/4}$.

c) $\max\left\{(x+y+z)xyz \,|\, x^4+y^4+z^4=1\right\} = 1$.

d) $\frac{x^4+y^4+z^4}{x+y+z} \geq xyz$.

2ª Questão:

O objetivo desta questão é demonstrar a fórmula de Green em um retângulo. Sejam $R=[a,b]\times[c,d]$ e $P,Q : R \to \mathbb{R}$ contínuas tais que $\frac{\partial P}{\partial y}$ e $\frac{\partial Q}{\partial x}$ existem e são integráveis. Mostre que

$$\oint_{\partial R} (P,Q)\cdot d\vec{l} = \int_R \left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right] dxdy.$$

3ª Questão:

Seja $A\subset\mathbb{R}^n$ não vazio. Definimos, para todo $x\in\mathbb{R}^n$,

$$\rho(x) = \inf_{a\in A} \|x-a\|.$$

Mostre que

a) $\rho(x)=0$ se, e somente se, $x\in\overline{A}$.

b) Se A é fechado então existe $a\in A$ tal que $\rho(x)=\|x-a\|$.

c) $\rho(x)-\rho(y)\leq\|x-y\|$.

d) Conclua que ρ é Lipschitz contínua com constante de Lipschitz igual a 1.

Sugestão: para mostrar (c) observe que para todo $\varepsilon>0$ existe $a\in A$ tal que $\rho(y)+\varepsilon\geq\|y-a\|$.

4ª Questão:

Seja A uma matriz $n \times n$ e $f \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $f(0) = 0$ e $f'(0) = 1$. Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ definimos

$$S_\lambda = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid Ax - (f(\lambda x_1), ..., f(\lambda x_n)) = 0\}.$$

Mostre que se λ_0 não é autolavor de A, então existem $\varepsilon, \delta > 0$ tais que

$$|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad S_\lambda \cap B_0(\delta) = \{0\}$$

(onde $B_0(\delta)$ é a bola de centro $0 \in \mathbb{R}^n$ e raio δ).

Sugestão: considere a função $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$F(\lambda, x) = Ax - (f(\lambda x_1), ..., f(\lambda x_n)).$$

EXAMES DE
ÁLGEBRA LINEAR

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA

Exame de Álgebra Linear

Setembro de 1989

1ª Questão:

Se A é uma matriz complexa 5×5 com polinômio característico $(X-2)^3(X+7)^2$ e polinômio minimal $(X-2)^2(X+7)$, qual a forma de Jordan de A?

2ª Questão:

Seja V um espaço vetorial e $T\colon V \longrightarrow V$ uma transformação linear tal que $T \circ T = T$. Mostre que $V = \mathrm{Im}(V) \oplus \mathrm{Ker}(T)$. Use isto para mostrar que duas matrizes idempotentes de mesmo posto são similares.

3ª Questão:

Seja A uma matriz $n \times n$ e λ um autovalor de A. Se $f(X)$ é um polinômio, mostre que $f(\lambda)$ é um autovalor de $f(A)$.

4ª Questão:

Se A é uma matriz real simétrica, mostre que existe um inteiro m tal que $mI + A$ é positiva definida. Ache o menor m que satisfaça esta propriedade no caso em que A é a matriz

$$\begin{pmatrix} -10 & 5 & 2 \\ 5 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

5ª Questão:

Mostre que toda matriz ortogonal 3×3 é similar a uma matriz da forma

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

onde B é uma matriz ortogonal 2×2.

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA

Exame de Álgebra Linear

Março de 1990

1ª Questão:

Seja A a matriz complexa

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 \\ b & c & -1 \end{bmatrix}$$

Mostre que A é similar a uma matriz diagonal se, e somente se, $a = 0$.

2ª Questão:

Seja V um espaço vetorial complexo de dimensão finita, com produto interno. Seja T um operador auto-adjunto em V. Mostre que:

a) $\|\alpha + iT\alpha\| = \|\alpha - iT\alpha\|$, para todo $\alpha \in V$.

b) $\alpha + iT\alpha = \beta + iT\beta$ se, e somente se, $\alpha = \beta$.

c) $I + iT$ e $I - iT$ são invertíveis.

d) O operador $U\colon V \longrightarrow V$ definido por $U = (I - iT)(I + iT)^{-1}$ é um operador unitário.

3ª Questão:

a) Sejam N_1 e N_2 duas matrizes complexas 3×3, nilpotentes. Mostre que N_1 é similar a N_2 se, e somente se, N_1 e N_2 têm o mesmo polinômio minimal.

b) Sejam A e B matrizes complexas $n \times n$ que têm o mesmo polinômio característico

$$f(x) = (x - c_1)^{d_1} \dots (x - c_k)^{d_k}$$

e o mesmo polinômio minimal. Suponha que $d_i \leq 3$, para todo $i = 1, \dots, k$. Mostre que A e B são similares.

4ª Questão:

Seja E um espaço real de dimensão finita. Seja T um operador linear em E. Suponha que T tem um autovalor complexo $\lambda = \alpha + i\beta$ com $\beta \neq 0$. Mostre que existem $u, v \in E$, linearmente independentes tais que:

a) O espaço gerado por u e v é invariante por T.

b) A matriz de T restrita a este subespaço (na base $\{u, v\}$) é

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$

Sugestão: Estenda T ao complexificado de E e procure w tal que $Tw = \lambda w$. Se E é um espaço vetorial real, seu complexificado é $\tilde{E} = \big\{x + iy \mid x, y \in E\big\}$ é um espaço vetorial complexo. Dado $T\colon E \longrightarrow E$ linear, T admite uma única extensão linear $\tilde{T}\colon \tilde{E} \longrightarrow \tilde{E}$, dada por $\tilde{T}(x + iy) = T(x) + iT(y)$.

5ª Questão:

Seja V um espaço de dimensão finita com produto interno e T um operador linear invertível em V. Mostre que existe um operador unitário U em V e um operador positivo N em V tal que $T = UN$.

Sugestão: Mostre que existe um operador invertível positivo R tal que $R^2 = T \circ T$.

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA

Exame de Álgebra Linear

Setembro de 1990

$1^{\underline{a}}$ Questão:

Seja A uma matriz complexa $n \times n$ satisfazendo à equação $A^r = I$, $r \in \mathbb{N}$, $r \neq 0$.

a) Mostre que A é diagonalizável.

b) Mostre que $|\operatorname{tr} A| \leq n$.

$2^{\underline{a}}$ Questão:

Seja A uma matriz real $n \times n$ satisfazendo $A^t = A^2 - 2A + 2I$.

a) Mostre que A e A^t são simultaneamente diagonalizáveis.

b) Calcule os possíveis autovalores reais de A.

$3^{\underline{a}}$ Questão:

Seja J uma matriz real 4×4 tal que $J^2 = -I$. Seja A uma matriz real 4×4 satisfazendo $A^t J A = J$.

a) Mostre que J é não singular.

b) Mostre que se λ é auto-valor de A, então λ^{-1} também é.

$4^{\underline{a}}$ Questão:

Seja A uma matriz $n \times n$, simétrica e positiva definida.

a) Mostre que existe uma única matriz B $n \times n$, simétrica positiva definida tal que $B^2 = A$.

b) Mostre que existem $B \neq C$ simétricas tais que $B^2 = C^2$.

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA

Exame de Álgebra Linear

Setembro de 1991

$1^{\underline{a}}$ Questão:

Seja $T\colon \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ transformação linear e suponha que seu polinômio mínimo tenha somente raízes simples. Mostre que T é diagonalizável.

2ª Questão:

Seja $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ o espaço das trasformações lineares de $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Mostre que se $P \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ é simétrica positiva definida então a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \\ & X & \mapsto & PX + XP \end{array}$$

é um isomorfismo linear.

3ª Questão:

Seja $T\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ linear tal que $T^2 = T - I$.

a) Mostre que n é par.

b) Se $n = 2k$, mostre que existe base β do $\mathbb{R}^n$ tal que

$$[T]_\beta = \begin{bmatrix} 0 & -I_k \\ I_k & I_k \end{bmatrix},$$

onde I_k é a matriz identidade $k \times k$.

4ª Questão:

Seja $T\colon V \longrightarrow V$ um operador linear, onde V é um espaço vetorial complexo com produto interno. Mostre que T é normal se, e somente se, $T = T_1 + iT_2$, onde T_1 e T_2 são operadores auto-adjuntos que comutam.

5ª Questão:

a) Descrever suscintamente como se consegue uma *base de Jordan* para um operador nilpotente $L\colon U \longrightarrow U$.

b) Seja $T\colon \mathbb{R}^{10} \longrightarrow \mathbb{R}^{10}$ um operador linear cujo polinômio mínimo é $p_m = (x-2)^4$ e tal que $\dim \operatorname{Ker}(T - 2I) = 3$. Descreva as possibilidades para $\dim \operatorname{Ker}(T-2I)^2$ e $\dim \operatorname{Ker}(T-2I)^?$

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA

Exame de Álgebra LInear

Setembro de 1992

1ª Questão:

Seja $T\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ um operador linear de posto 1. Demonstre que T é diagonalizável ou nilpotente.

2ª Questão:

Seja $T\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ um operador linear cujos polinômios mínimo e característico são, respectivamente, $(x^2+1)(x-2)$ e $(x^2+1)(x-2)^2$. Determine as possíveis formas canônicas reais de T, a menos da ordem dos blocos.

3ª Questão:

Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ortogonal. Mostre que T ou é uma rotação em torno de um eixo ou é a composição de uma rotação em torno de um eixo com a reflexão com respeito ao plano que passa pela origem e é perpendicular ao eixo.

4ª Questão:

Sejam $T\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ um operador linear e λ um auto-valor de T. Seja $N_i = \big\{v \in \mathbb{R}^m \mid (T-\lambda I)^i v = 0\big\}$. Demonstre que:

a) $N_i \subseteq N_{i+1}$.

b) Se $N_{i+1} = N_i$ então $N_{i+j} = N_i$ para todo $j \geq 0$.

c) Existe i satisfazendo a propriedade do item b).

5ª Questão:

Seja A uma matriz auto-adjunta $n \times n$. Uma matriz B $n \times n$ é dita uma *raiz quadrada* de A se $B^2 = A$.

a) Mostre que se todos os auto-valores de A são positivos, então A admite uma raiz quadrada que é auto-adjunta.

b) Calcule uma raiz quadrade de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Ela é auto-adjunta?

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA
Exame de Álgebra Linear
Setembro de 1993

1ª Questão:

Seja A matriz real $n \times n$ e suponha que $\lambda \in \mathbb{C}$ é autovalor de A com parte imaginária não nula. Mostre que existe um subespaço de dimensão 2 em $\mathbb{R}^n$ invariante por A.

2ª Questão:

Seja $A, B\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ lineares. Mostre que $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(B)$ se e só se existe $C\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ linear inversível com $A = CB$.

$3^{\underline{a}}$ Questão:

Seja $B\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ linear e simétrica. Sejam

$$\Lambda = \big\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \text{ é autovalor de } \; B\big\}$$
$$\rho(B) = \max_{\lambda\in\Lambda} |\lambda|$$

($\rho(B)$ é dito o raio espectral de B).

Dado $u_0 \in \mathbb{R}^n$, defina a sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por $u_{n+1} = Bu_n$.

a) Mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ para qualquer u_0 se e só se $\rho(B) < 1$.

b) Refaça o problema sem a hipótese "B simétrica".

$4^{\underline{a}}$ Questão:

Seja A uma matriz real $n \times n$. Mostre que vale a "decomposição QR", isto é: existem Q ortogonal e R triangular superior tais que $A = QR$.

$5^{\underline{a}}$ Questão:

Seja $A\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ linear e tal que $A^{-1} = A^2 + A$. Mostre que existe $B\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ linear tal que $B^2 = A$.

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA
Exame de Álgebra Linear
Março 1994

$1^{\underline{a}}$ Questão:

Construa uma matriz A, 3×3, que tem apenas 2 autovetores independentes, sabendo que A fixa os vetores (0,1,3) e (3,0,1). Calcule A^{20}.

$2^{\underline{a}}$ Questão:

Uma transformação unitária A pode satisfazer a equação $2A - A^3 = 0$? Explique.

$3^{\underline{a}}$ Questão:

Seja:

$$A = \begin{pmatrix} & & & & \alpha_n \\ & 0 & & \alpha_{n-1} & \\ & & \dots & & \\ & \alpha_2 & & 0 & \\ \alpha_1 & & & & \end{pmatrix}$$

Sob que condições A é diagonalizável? (Nota : Os α_i são complexos).

4ª Questão:

Seja A uma matriz normal, tal que $A^3 = A^2$. Prove que então A é idempotente. O que acontece se não supomos que A é normal?

5ª Questão:

Seja p um polinômio de grau n. Considere $A\colon p(t) \mapsto p(t+1)$. Qual é o polinômio mínimo de A? Encontre a base de Jordan.

6ª Questão:

Seja A tridiagonal simétrica :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & & \\ b_1 & a_2 & b_2 & & & \\ & b_2 & a_3 & \dots & & \\ & & \dots & \dots & \dots & \\ & & & & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

onde todos os b_i são diferentes de 0.

Mostre que todos os auto-espaços têm dimensão 1.

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA

Exame de Álgebra Linear

Setembro de 1994

1ª Questão:

Ache a forma de Jordan da matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

2ª Questão:

Sejam A e B matrizes de ordem (m, n) e (k, m) respectivamente.

a) Prove que $\text{posto}(BA) \leq \min\{\text{posto}(B), \text{posto}(A)\}$.

b) Se $m = k$ e B é inversível, prove que $\text{posto}(BA) = \text{posto}(A)$

3ª Questão:

Seja A uma transformação linear de posto 1.

a) Mostre que existe um único escalar α tal que $A^2 = \alpha A$.

b) Mostre que se $\alpha \neq 1$ então $I - A$ é inversível.

4ª Questão:

Seja A matriz 2×2 e considere

$$\lambda_2 = \max\{\big(Av; v\big) \mid \|v\| = 1\}, \quad \lambda_1 = \min\{\big(Av; v\big) \mid \|v\| = 1\},$$

onde $\big(\ ;\ \big)$ e $\|\cdot\|$ denotam respectivamente o produto escalar e a norma usuais de $\mathbb{R}^2$.

a) Prove que se A é simétrica, então λ_1 e λ_2 são os autovalores de A.

b) De exemplo de matriz A para a qual os λ_i acima não são autovalores.

5ª Questão:

Seja $A = (a_{ij})$ matriz $n \times n$ e $\{\lambda_1, \dots \lambda_l\}$ seus autovalores. Defina

$$L_i = |a_{i1}| + \cdots + |a_{in}|, \quad C_j = |a_{1j}| + \cdots + |a_{nj}|,$$

$$L = \max_{1 \leq i \leq n} L_i \text{ e } C = \max_{1 \leq j \leq n} C_j.$$

Prove que $\max_{1 \leq k \leq l} |\lambda_k| \leq \min\{L, C\}$.

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA
Exame de Álgebra Linear
Março de 1995

1ª Questão:

Seja A uma matriz real, com polinômio característico:

$$p_c = (x-1)^3(x-2)^4(x-3)^5 \dots (x-n)^{n+2}$$

e com polinômio mínimo:

$$p_m = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3 \dots (x-n)^n$$

1) Quantas possibilidades existem para a Forma Normal de Jordan de A?

2) Para que valores de n a matriz A pode ser simétrica? Ortogonal?

3) Qual o maior número possível de auto-vetores à direita (módulo $\mathbb{R}_*$) de A?

2ª Questão:

Seja $T: \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ linear, tal que:

$$T^2 = T - I$$

1) Mostre que N é par.
2) Se $N = 2k$, mostre que existe uma base β de $\mathbb{R}^N$ tal que:

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & -I_k \\ I_k & I_k \end{pmatrix}$$

onde I_k é a identidade de $\mathbb{R}^k$.

3ª Questão:

Seja $\|A\|_\infty = \max \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}$. Mostre que:

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$$

4ª Questão:

Enuncie e prove o Teorema Espectral para matrizes Hermitianas.

5ª Questão:

Seja $B = (b_{ij})$, $1 \leq i, j \leq 20$ uma matriz 20×20 real, tal que:

$$\begin{cases} b_{ii} = 0 & \text{se } 1 \leq i \leq 20 \\ b_{ij} \in \{-1; 1\} & \text{se } 1 \leq i, j \leq 20,\ i \neq j \end{cases}$$

Mostre que B é não-singular.

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA
Exame de Álgebra Linear
Setembro de 1995

1ª Questão:

Sejam $A, B: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ transformações lineares com $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(B)$. Mostre que existe $C: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear e invertível tal que $A = BC$.

2ª Questão:

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e $\{v_1, \ldots, v_n\}$, $\{w_1, \ldots, w_m\}$ duas bases de V. Mostre que $n = m$.

3ª Questão:

Seja $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformação linear tal que $A^3 - 2A^2 + 2A = I$. Mostre que A é ortogonal.

4ª Questão:

Seja $B\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ transformação linear e

$$\|x\| = \Big(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\Big)^{1/2}$$

a norma euclidiana definida para $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$. Defina

$$\|B\|_* = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^N \\ x \neq 0}} \frac{\|Bx\|}{\|x\|}$$

(pode-se mostrar que $\|\ \cdot\ \|_*$ define uma norma).

(i) Mostre que se B é simétrica, então $\|B\|_* = \max\{|\lambda_i|\,;\, \lambda_i \text{ autovalor de } B\}$

(ii) Mostre que a igualdade em (i) não se verifica, em geral, se B não é simétrica.

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA

Exame de Álgebra Linear

Março de 1996

1ª Questão:

Sejam $A, B\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ lineares. Mostre que $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(B)$ se e só se existe $C\colon \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^k$ linear e inversível tal que $A = CB$.

2ª Questão:

Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quantas matrizes (reais) ortogonais P existem tais que:

(a) $P^{-1}AP$ é diagonal?

(b) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

3ª Questão:

Mostre que a matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

é similar a uma matriz do tipo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^3 \end{pmatrix}$$

Generalize para dimensões maiores.

4ª Questão:

Seja $r(A) =$ máximo dos módulos dos autovalores da matriz A. Mostre que $r(A) = \|A\|$ se e somente se

$$\|A^k\| = \|A\|^k, \quad \forall k = 0, 1, 2, \ldots$$

5ª Questão:

Diz-se que uma transformação linear A é uma isometria parcial se

$$\|Av\| = \|v\| \;\; \forall v \in W, \quad \text{onde} \quad W = (\operatorname{Ker} A)^{\perp}.$$

(i) Encontre uma isometria parcial que tem um autovalor $\lambda = 1/2$.

(ii) Mostre que se λ é autovalor de uma isometria parcial então $|\lambda| \leq 1$.

(ii) Mostre que A é isometria parcial se e somente se A^*A é uma projeção ortogonal.

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA

Exame de Álgebra Linear

Setembro de 1996

1ª Questão:

Sejam A e B matrizes diagonalizáveis complexas $n \times n$ tais que $AB = BA$. Mostre que existe uma base de $\mathbb{C}^n$ que diagonaliza simultaneamente A e B.

2ª Questão:

Mostre que toda matriz complexa $n \times n$ A se escreve da forma:

$$A = QRQ^h,$$

onde Q é unitária e R é triangular superior. Essa fatoração é chamada de forma normal de Schurr.

Deduza o teorema espectral para matrizes hermitianas.

Existe alguma decomposição análoga para matrizes reias (com R real)?

3ª Questão:

Seja $B = (b_{ij})$ uma matriz 20×20 real tal que $b_{ii} = 0$, $1 \leq i \leq 20$ e $b_{ij} \in \{-1, 1\}$ se $i \neq j$. Mostre que B é não-singular.

4ª Questão:

Ache a forma de Jordan de

$$\begin{pmatrix} -1 & 9 & -1 & 9 \\ -9 & 6 & -9 & 6 \\ 1 & -9 & -1 & 9 \\ 9 & -6 & -9 & 6 \end{pmatrix}$$

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA

Exame de Álgebra Linear

Março de 1997

1ª Questão:

Enuncie e demonstre o Teorema Espectral para transformações lineares em espaços vetoriais de dimensão 2.

2ª Questão:

Seja N um número natural e $I_j = \{[(j-1)/N, j/N)\,;\, j = 1, 2, \ldots, N\}$.

Seja $E = \{f\colon [0,1) \to \mathbb{R}\,;\, f|_{I_j}$ é linear $\}$ e $W = \{f\colon [0,1) \to \mathbb{R}\,;\, f|_{I_j}$ é constante $\}$.

i) Determine uma base de E.

ii) Determine uma base de W.

iii) Determine uma base para o espaço quociente E/W.

3ª Questão:

Seja A uma matriz $n \times n$ de coeficientes $a_{i,j}$ dados por

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 2 & \text{se } i = j - 1 \\ 0 & \text{senão} \end{cases}$$

Determine a forma canônica de Jordan de A.

4ª Questão:

Seja $\mathbb{Z}$ o conjunto dos inteiros e $\mathbb{Z}^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n\,;\, a_i \in \mathbb{Z},\ i = 1, \ldots, n\}$. Se $u = (a_i)$ e $v = (b_i)$, definimos a soma $u + v$ tal que $(u + v)_i = a_i + b_i$, $\forall i = 1, \ldots, n$. Além disso, se $\lambda \in \mathbb{Z}$, definimos o produto por escalar $\lambda u \in \mathbb{Z}^n$ tal que $(\lambda u)_i = \lambda a_i$, $\forall i = 1, \ldots, n$. Seja $\beta = \{u^1, u^2, \ldots, u^k\} \subset \mathbb{Z}^n$. Dizemos que β é um conjunto linearmente independente (l.i.) se $\forall \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{Z}$,

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i u^i = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0.$$

Dizemos que $\beta \subset W \subset \mathbb{Z}^n$ gera W se

$$\forall w \in W, \exists \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{Z} \text{ tais que } w = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u^i$$

$\beta \subset W$ é dito uma base de W se β é um conjunto l.i. que gera W.

(a) Determine uma base para $\mathbb{Z}^n$.

(b) Mostre que duas bases de $\mathbb{Z}^n$ têm a mesma cardinalidade n

(Sugestão: Mostre que, se β é uma base de $\mathbb{Z}^n$ então β é base do espaço vetorial $\mathbb{Q}^n$).

(c) Determine um conjunto de n elementos l.i. de $\mathbb{Z}^n$ que não gera $\mathbb{Z}^n$.

(d) Determine condições necessárias e suficientes para que um conjunto de elements l.i. seja uma base de $\mathbb{Z}^n$.

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA
Exame de Álgebra Linear
Setembro de 1997

1ª Questão:

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e A uma transformação linear em V. Mostre que se todo subespaço M de V é invariante por A, então A é um múltiplo escalar do operador identidade.

2ª Questão:

Seja A uma transformação linear em um espaço vetorial V de dimensão finita. Suponha que o posto de A^2 seja igual ao posto de A. Prove que $\operatorname{Im} A \cap \operatorname{Ker} A = \{0\}$.

3ª Questão:

Seja $A\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$, uma transformação linear e suponha que seu polinômio mínimo tenha somente raízes simples. Mostre que A é diagonalizável.

4ª Questão:

Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & a \\ 1/4 & 3/4 & b \\ c & d & 1/2 \end{pmatrix}$$

(a) Sabendo que a matriz A representa uma rotação em torno de um eixo, encontre os valores de a, b, c e d.

(b) Determine o ângulo e o eixo de rotação.

(c) É possível encontrar valores para as constantes a, b, c, e d de forma que a matriz A represente uma reflexão? Justifique sua resposta.

5ª Questão:

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno.

(a) Seja $T\colon V \to V$ linear. Mostre que T é um operador normal se e somente se existem operadores lineares $A, B\colon V \to V$ auto-adjuntos que comutam entre si e tais que $T = A + iB$.

(b) Sejam A e B operadores auto-adjuntos que comutam entre si. Mostre que todo auto-espaço de A é invariante por B (e vice-versa).

(c) Assumindo o Teorema Espectral para operadores auto-adjuntos, demonstre, usando (a) e (b) o Teorema Espectral para operadores normais em V.

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA

Exame de Álgebra Linear

Março de 1998

1ª Questão:

Sejam v_1 e v_2 dois vetores de $\mathbb{R}^3$. Determine condições necessárias e suficientes para que exista uma transformação linear ortogonal T de $\mathbb{R}^3$ tal que $Tv_1 = v_2$.

2ª Questão:

Seja $v \in \mathbb{R}^n$. Mostre como construir uma transformação linear simétrica $T \neq I$ de $\mathbb{R}^n$ tal que $Tv = v$.

3ª Questão:

Seja V um espaço vetorial e $T \in \mathcal{L}(V)$. Suponha $V = W_1 \oplus W_2$, onde W_i é T-invariante, $i = 1, 2$. Seja $T_i = T|_{W_i}$, $i = 1, 2$. Mostre que:

(a) o polinômio característico de T é o produto dos polinômios característicos de T_1 e T_2.

(b) o polinômio mínimo de T é o mínimo múltiplo comum entre os polinômios mínimos de T_1 e T_2.

4ª Questão:

Uma bandeira em um espaço vetorial V de dimensão n é uma coleção de subespaços $V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n$, com $\dim V_j = j$. Se T é uma transformação linear de V, uma bandeira é dita T-invariante se cada subespaço V_j é T-invariante. Mostre que se T é um operador diagonalizável então existe uma bandeira T-invariante em V. Mostre que a recíproca não é verdadeira.

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA
Exame de Álgebra Linear
Setembro de 1998

1ª Questão:

Seja $A \in \mathbb{R}^{7\times 7}$ tal que

(i) $\dim N(A) = 1$, onde $N(A)$ é o núcleo de A;

(ii) $A^2 - 2A + 2I$ é singular;

(iii) o polinômio $p(z) = (z-2)^2$ divide o polinômio mínimo de A;

(iv) o polinômio $q(z) = (z-3)$ divide o polinômio característico de A.

Quais são as possíveis formas canônicas reais de Jordan de A?

2ª Questão:

Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ache a forma canônica de Jordan de A e calcule A^{99}.

3ª Questão:

Sejam $A_1, \dots, A_m$ matrizes hermitianas em $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Suponha que

$$\sum_{k=1}^{m} A_k^2 = 0.$$

Mostre que $A_1 = \cdots = A_m = 0$.

4ª Questão:

Seja V um espaço vetorial complexo de dimensão finita com produto interno. Mostre que $A\colon V \to V$ é um operador normal se e somente se $\|Ax\| = \|A^*x\|$, $\forall x \in V$, onde $\|\cdot\|$ é a norma associada ao produto interno de V.

5ª Questão:

Seja A um operador linear em um espaço vetorial complexo de dimensão finita com produto interno. Defina $N^2 = A^*A$. Mostre que existe um operador unitário U tal que $A = UN$.

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA
Exame de Álgebra Linear
Setembro de 1999

1ª Questão:

Se $a > 0$, que tipo de cônica representa a equação $x^2 + 8xy + 17y^2 = a$?

2ª Questão:

Dê um exemplo de uma matriz ortogonal real A, 5×5, que tenha apenas um autovalor real de multiplicidade algébrica igual a 1.

3ª Questão:

a) Considere B uma matriz complexa $n \times n$. Mostre que $B = 0$ se e somente o traço de BB^* é igual a zero.

b) Mostre que A é hermitiana se e somente se $AA^* = A^2$.

   Sugestão: Considere $B = A - A^*$ e use o item (a).

4ª Questão:

Considere a matriz A 10×10 dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 10 \\ 11 & 12 & \cdots & 20 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 91 & 92 & \cdots & 100 \end{pmatrix}$$

a) Mostre que o posto de A é igual a 2 e dê uma base para a imagem de A.

b) Mostre que a nulidade de A é 8 e dê uma base para o núcleo de A.

5ª Questão:

Considere a matriz tridiagonal A $n \times n$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Seja $\vec{u}_k \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$u_k^i = \operatorname{sen} \frac{ik\pi}{n+1}.$$

Mostre que $\vec{u}_k$ é autovetor de A $\forall k \in \mathbb{N}$.

b) Mostre que $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ forma uma base ortogonal de autovetores de A.

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA

Exame de Álgebra Linear

Março de 2000

1ª Questão:

a) Seja B matriz $n \times n$ simétrica e $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $B^2 u = 0$. Mostre que $\mathrm{Ker}(B^2) = \mathrm{Ker}(B)$, onde $\mathrm{Ker}(B)$ denota o núcleo de B.

b) Dê exemplo de uma matriz B não simétrica tal que $\mathrm{Ker}(B^2) \neq \mathrm{Ker}(B)$.

2ª Questão:

Mostre que uma transformação linear ortogonal de $\mathbb{R}^2$ é uma reflexão ou uma rotação.

$3^{\underline{a}}$ Questão:

Determine todas as transformações lineares ortogonais $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tais que $T(1,2) = (2,1)$.

Sugestão: Use a Questão 2.

$4^{\underline{a}}$ Questão:

Considere a seqüência de números inteiros $\{a_n\}$ gerada pela lei de recorrência:

$$\begin{cases} a_{n+2} = 6a_n + a_{n+1}, \ n \geq 1, \\ \qquad a_1 = 1, \ a_2 = 2. \end{cases}$$

Determine a_{100}.

Sugestão: Existe uma matriz B 2×2 tal que $\vec{x}_{n+1} = B\vec{x}_n$, onde $\vec{x}_n = (a_n, a_{n+1})$.

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA

Exame de Álgebra Linear

Setembro de 2000

$1^{\underline{a}}$ Questão:

Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Dê condições sobre os coeficientes a, b, c, $d \in \mathbb{R}$ para que:

1) A seja inversível;
2) A tenha posto igual a 1;
3) A seja simétrica e positiva definida;
4) A seja uma projeção ortogonal;
5) A preserve área (isto é, se P é um paralelogramo de $\mathbb{R}^2$ de área a e $f(x) = Ax$, então $f(P)$ tem área a.)

$2^{\underline{a}}$ Questão:

Sejam $L\colon \mathbb{R}^{25} \to \mathbb{R}^5$ e $M\colon \mathbb{R}^{125} \to \mathbb{R}^{25}$ transformações lineares tais que $L \circ M$ é sobrejetiva. Determine todos os possíveis valores para a dimensão do núcleo de M.

$3^{\underline{a}}$ Questão:

Mostre que se A é uma matriz $n \times n$ tal que a soma dos elementos de cada linha é 1, então $\lambda = 1$ é autovalor de A.

4ª Questão:

Demonstre se a afirmativa é verdadeira, ou dê um contra-exemplo caso seja falsa:

1) Não existe uma matriz $n \times n$ unitária A tal que $2A - A^3 = 0$.
2) A única matriz 3×3 real A que satisfaz a equação $2A - A^3 = I$ é a matriz identidade.

5ª Questão:

Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita e $T\colon V \to V$ uma transformação linear. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $T^2 + \alpha T + \beta I = 0$. Prove que T tem um autovalor se e somente se $\alpha^2 \geq 4\beta$.

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA
Exame de Álgebra Linear
Fevereiro de 2001

1ª Questão:

Considere a matriz

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & a \\ b & 2 & d \\ 1 & c & 5 \end{pmatrix}$$

Sabendo que A representa uma projeção ortogonal sobre um plano de $\mathbb{R}^3$, determine:

(a) os valores dos coeficientes a, b, c e d;

(b) a equação do plano sobre o qual é feita a projeção.

(c) É possível encontrar valores para a, b, c e $d \in \mathbb{R}$ de forma que a matriz A represente uma rotação? E uma reflexão?

2ª Questão:

Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T\colon V \to V$ uma transormação linear. Prove que:

(a) T é normal se e somente se $\|Tv\| = \|T^*v\|$, $\forall v \in V$;

(b) T é normal $\Rightarrow \operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} T^*$;

(c) Suponha $\dim V = 2$. Se T é normal e não é auto-adjunta, então a matriz de T com respeito a qualquer base ortonormal de V tem a forma

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad b \neq 0.$$

3ª Questão:

(a) Mostre que todas as matrizes (com $n > 1$) do tipo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & \cdots & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \cdots & 3n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-1)n+1 & (n-1)n+2 & \cdots & \cdots & n^2 \end{pmatrix}$$

possuem posto igual a 2.

(b) Encontre uma base para a imagem da matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

4ª Questão:

Demonstre se a afirmativa é verdadeira, ou dê um contra-exemplo se for falsa.

(a) Se o polinômio mínimo de uma transformação linear T em um espaço vetorial de dimensão n tem grau n, então A é diagonalizável.

(b) Se A é nilpotente, então $\lambda = 0$ é o único autovalor de A.

(c) Se A é uma matriz 3×3 e possui 3 autovetores linearmente independentes, então A é inversível.

5ª Questão:

Sejam T e S duas transformações lineares em um espaço vetorial complexo V de dimensão finita tais que $TS = ST$.

(a) Prove que se λ é um autovalor de T, então $W = \{v \in V \,;\, Tv = \lambda v\}$ é um subespaço invariante por S.

(b) Prove que T e S possuem ao menos um autovetor em comum.

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA

Exame de Álgebra Linear

Dezembro de 2001

1ª Questão:

Qual o grau do polinômio mínimo da matriz B abaixo? E da matriz $(n \times n)$ C abaixo?

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2ª Questão:

(a) Caracterize a classe das matrizes Q reais $n \times n$ com a seguinte propriedade: para toda matriz $n \times n$ real A, $\|QA\|_F = \|A\|_F$.

(b) Mostre que $\|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F$, para todas A e B.

(c) Mostre que $\|A\|_1 = \|A^T\|_\infty$.

3ª Questão:

Seja $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma transformação linear. S^k denota sempre a esfera de raio 1 em $\mathbb{R}^{k+1}$. Descreva geometricamente, distinguindo os casos que forem necessários:

(a) $A(S^{m-1})$;

(b) $A^{-1}(S^{m-1})$.

4ª Questão:

Seja $a : (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}^n$ uma forma k-linear alternada não-nula em $\mathbb{R}^n$. A norma de a pode ser definida assim:

$$\|a\|_2 = \sup_{\|u_1\|_2 = \cdots = \|u_k\|_2 = 1} |a(u_1, \ldots, u_k)|.$$

Mostre que se a norma de a é atingida para um certo valor de $u_1, \ldots, u_k$ acima, então a matriz U de colunas $u_1, \ldots, u_k$ é ortogonal.

5ª Questão:

Seja A_n o subespaço de $L(n)$ gerado pelas matrizes de permutação. Mostre que

$$\dim A_n = n^2 - 2n + 2.$$

Sugestão: mostre primeiro que $A_n = (A_n \cap \mathrm{Sim}_n) \oplus (A_n \cap \mathrm{Anti}_n)$, onde Sim_n e Anti_n são, respectivamente, os espaços das matrizes simétricas e anti-simétricas.

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA

Exame de Álgebra Linear

Dezembro 2002

1ª Questão:

a) S é uma raiz cúbica de T se $S^3 = T$. Um operador auto-adjunto T tem sempre uma raiz cúbica? Prove ou dê um contra-exemplo.

b) Uma involução é uma transformação linear U tal que $U^2 = I$. Mostre que a equação $U = 2T - I$ estabelece uma correspondência biunívoca entre o conjunto das projeções T no conjunto das involuções U.

c) Uma projeção é uma transformação linear T tal que $T^2 = T$. Mostre que se T é uma projeção então seu traço é igual à dimensão de $\mathrm{Im}(T)$.

d) Sejam $A, B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ transformações lineares com $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(B)$. Mostre que existe $C : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear e invertível tal que $A = CB$.

2ª Questão:

Seja $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma transformação linear simétrica tal que $\lim\limits_{k\to\infty} \|A^k\| = 0$. Prove que todo autovalor λ de A satisfaz $|\lambda| < 1$.

3ª Questão:

Seja A uma matriz $n \times n$ real. Suponha que existam matrizes ortogonais U e V tais que $A = UCV^T$, onde

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & c_n \end{pmatrix}.$$

Mostre que as colunas de U são autovetores de AA^T e que $c_1^2, \ldots, c_n^2$ são os autovalores associados. Mostre também que as colunas de V são autovetores de $A^T A$.

4ª Questão:

Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & a \\ 1/4 & 3/4 & b \\ c & d & 1/2 \end{pmatrix}.$$

a) Sabendo que a matriz A representa uma rotação em torno de um eixo, encontre os valores de a, b, c e d.

b) Determine o ângulo e o eixo de rotação.

c) É possível encontrar valores para as constantes a, b, c e d de forma que a matriz A represente uma reflexão? Justifique sua resposta.

EXAMES DE
VARIÁVEIS COMPLEXAS

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA

Exame de Variáveis Complexas

Setembro de 1989

1ª Questão:

Suponha que a função $f(z)$ é holomorfa para $|z| > R$, e que $f(z)$ é limitada quando $|z| \to \infty$. Demonstre que $f(z)$ pode ser expandida como uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n},$$

que é convergente quando $|z| > R$.

2ª Questão:

Calcule

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{a-1}}{1+t}\, dt,$$

onde $0 < a < 1$.

3ª Questão:

Mostre que se $f(z)$ é uma função contínua em γ, onde $\gamma\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ é C^1 por partes, então a função

$$\tilde{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-\xi}\, dz$$

está bem definida e é analítica em $E = \mathbb{C} \setminus \gamma([a,b])$. Sua derivada $\tilde{f}'$ é dada por

$$\tilde{f}'(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-\xi)^2}\, dz$$

para todo $\xi \in E$. Observe que γ não precisa ser fechada. O que acontece quando γ é fechada?

4ª Questão:

Demonstre que se $f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ é analítica e injetiva, então $f'(z) \neq 0$, para todo $z \in U$.

5ª Questão:

Seja $f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica que não se anula no domínio aberto e simplesmente conexo U. Mostre que existe um ramo de $\log(f)$ definido em U.

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA

Exame de Variáveis Complexas

Março de 1990

$1^{\underline{a}}$ Questão:

Sejam f função inteira não constante, $a > 0$ e $\mathcal{S} = \{z \in \mathbb{C}; |f(z)| \leq a\}$. Demonstre que $\partial\mathcal{S} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = a\}$.

$2^{\underline{a}}$ Questão:

Sejam f e g duas funções holomorfas definidas em um subconjunto D aberto e conexo do plano $\mathbb{C}$ que não possuem zeros em D. Existe uma sequência $(a_n)_{n\leq 1}$ de pontos de D tais que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad a \in D \quad \text{e} \quad a_n \neq a \quad \forall n.$$

e também vale para todo n:

$$\frac{f'(a_n)}{f(a_n)} = \frac{g'(a_n)}{g(a_n)}.$$

Prove que existe uma constante complexa c tal que $f(z) = cg(z)$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

$3^{\underline{a}}$ Questão:

Calcule

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}\,dx.$$

$4^{\underline{a}}$ Questão:

a) Sejam $U \subset \mathbb{C}$ aberto conexo e $f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa não constante tal que $\forall z \in U$, $f(z) \neq 0$. Prove que existe uma função holomorfa $g\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $e^{g(z)} = f(z)$, $\forall z \in U$, se, e somente se, para todo caminho fechado e contínuo $\gamma\colon I \longrightarrow U$ vale

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 0.$$

b) Seja $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa que possui um número finito de zeros. Prove que existem uma função holomorfa $g\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ e um polinômio $p(z)$ tais que $f(z) = p(z)e^{g(z)}$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

$5^{\underline{a}}$ Questão:

a) Mostre que $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$ é uma equivalência conforme entre o semi-plano superior aberto $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ e o disco unitário $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

b) Calcule G equivalência conforme que leva o disco unitário aberto no semi-plano $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re z > 0\}$. Esta equivalência é única? Justifique sua resposta.

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA

Exame de Variáveis Complexas

Setembro de 1990

1ª Questão:

Seja f uma função inteira tal que $|f(z)| > 1/3$ se $|z| > M$. Prove que f é um polinômio.

2ª Questão:

Calcule

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{(1+x^2)^2}\,dx, \quad a > 0.$$

3ª Questão:

Seja f holomorfa em $0 \in \mathbb{C}$ tal que $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(k-1)}(0) = 0$, $f^{(k)}(0) \neq 0$. Mostre que existe g holomorfa em $0 \in \mathbb{C}$ tal que $g(0) = 0$, $g'(0) \neq 0$ e $f(z) = \big(g(z)\big)^k$ para z numa vizinhança de $0 \in \mathbb{C}$.

4ª Questão:

Usando o Teorema de Rouché mostre que se

$$p_m(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^m}{m!} \quad \text{e}$$
$$a_m = \min\big\{|z|; p_m(z) = 0\big\},$$

então $\lim\limits_{m\to\infty} a_m = \infty$.

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA

Exame de Variáveis Complexas

Fevereiro de 1991

1ª Questão:

Considere a função $f\colon D \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \int_0^{\infty} \frac{e^{zt}}{t+1}\,dt,$$

onde $D = \big\{z \in \mathbb{C} \mid \Re z < 0\big\}$. Prove que f está bem definida e é analítica.

Sugestão: Use Morera.

2ª Questão:

Mostre que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(5-3\operatorname{sen}\theta)^2} = \frac{5\pi}{32}.$$

Sugestão: Escreva $\operatorname{sen}\theta$ como função de $z = e^{i\theta}$.

3ª Questão:

Mostre que uma aplicação inteira f injetiva é um polinômio de grau 1.

Sugestão: Estude a singularidade de $F(z) = f(1/z)$.

4ª Questão:

Seja $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função harmônica. Prove que f não tem máximos locais a menos que f seja constante.

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA

Exame de Variáveis Complexas

Setembro de 1991

1ª Questão:

Calcule, pelo método dos resíduos, a seguinte integral imprópria:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9}\, dx.$$

2ª Questão:

Seja f uma função inteira não constante. Mostre que a função g definida por $g(z) = f(\frac{1}{z})$ tem uma singularidade não removível em $z = 0$.

3ª Questão:

Considere a equação diferencial complexa

$$zy' = z^2y^2 + my,$$

onde $m \in \mathbb{Z}^+$. Prove que toda solução não trivial $y = f(z)$ holomorfa no disco unitário $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ é da forma $f(z) = z^m f(z)$, onde g é holomorfa e diferente de zero em D.

Sugestão: Conte o número de zeros de f num pequeno disco centrado na origem.

4ª Questão:

Resolva um dos dois problemas abaixo.

4.1 Seja f holomorfa num disco D e $f \neq 0$ em ∂D. Sejam $a_1, \ldots, a_l$ os zeros de f em D contados com suas respectivas multiplicidades. Prove que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{z^n f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{j=1}^{l} a_j^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

4.2 Sejam a e b números complexos distintos e considere a função $R(z) = (z-a)/(z-b)$.

(1) Mostre que a imagem por R de $\mathbb{C} - [a, b]$ (complementar do intervalo fechado $[a, b] \subset \mathbb{C}$) está contida no complementar Ω do eixo real não positivo (i.e. $\Omega = \mathbb{C} - (\mathbb{R}^- \cup \{0\})$).

(2) Conclua que existe um ramo de $\log R(z)$ bem definido em Ω.

(3) Mostre que para qualquer curva fechada γ, que não intersepta o segmento $[a, b]$, tem-se:

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = \int_\gamma \frac{dz}{z-b}.$$

Sugestão: Tome a derivada de $\log R(z)$.

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA
Exame de Variáveis Complexas
Setembro de 1992

1ª Questão:

Prove que a equação $z^5 + 15z + 1 = 0$ tem exatamente 4 soluções no anel $\{z \mid 3/2 < |z| < 2\}$.

2ª Questão:

Mostre que

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

3ª Questão:

Seja $f(z)$ uma função inteira. Suponhamos que exista um número inteiro $n > 0$ e dois números reais positvos R e M tais que $|f(z)| \geq M|z|^n$, para qualquer z fora de um círculo de raio R. Mostre que $f(z)$ é um polinômio de grau maior ou igual a n.

4ª Questão:

Encontre o desenvolvimento em séries de potências (Laurent) de

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)}$$

no anel $0 < |a| < |z| < |b|$.

5ª Questão:

Seja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função analítica tal que para cada $x_0 \in \mathbb{R}$, a série de Taylor de f de centro x_0 converge no intervalo $|x - x_0| < e^{x_0}$. Mostre que f se estende a uma função inteira em $\mathbb{C}$.

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA

Exame de Variáveis Complexas

Setembro de 1993

1ª Questão:

Seja $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ e $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ harmônica. Mostre que existe $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ analítica com $\Re f = u$. Mostre que f é única a menos de uma adição por um imaginário puro.

2ª Questão:

Mostre que existe um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e u harmônica em Ω para os quais não vale a conclusão da questão anterior.

3ª Questão:

Seja f uma função inteira satisfazendo $|f(z)| \leq k|z|^m$, onde $k > 0$ e $m \in \mathbb{N}$. Suponha que existe $z_0 \in \mathbb{C}$, $z_0 \neq 0$ com $f(z_0) = kz_0^m$. Mostre que $f(z) = kz^m$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

4ª Questão:

Mostre que z_0 é singularidade essencial de f se e somente se z_0 é singularidade essencial de $1/f$.

5ª Questão:

Calcule

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2}\, dx.$$

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA

Exame de Variáveis Complexas

Março 1994

1ª Questão:

Prove o Teorema Fundamental da Álgebra.

2ª Questão:

Ache um aberto conexo U de $\mathbb{C}$ tal que, se $\mathcal{H}$ for o conjunto das funções analíticas em U, então a aplicação

$$\begin{array}{cccc} \dfrac{\partial}{\partial z}\colon & \mathcal{H} & \to & \mathcal{H} \\ & f & \mapsto & f' \end{array}$$

não é sobre.

3ª Questão:

Seja f analítica e limitada em $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$, contínua em $\bar{\mathcal{D}}$ e limitada em $\partial\mathcal{D} = \{z \mid \operatorname{Im} z = 0\}$

Prove que:

$$|f(z)| \leq \sup_{\xi \in \partial\mathcal{D}} |f(\xi)|$$

Sugestão: Fixe z_0, $\operatorname{Im} z_0 > 1$, $R > |z_0|$, e n natural e considere a função $z \mapsto \dfrac{f^n(z-i)}{z}$, onde $|z| < R$, $\operatorname{Im} z > 1$.

4ª Questão:

Sejam Ω_n, Ω regiões tais que para todo $z \in \Omega$, $\exists n_0 : \forall n \geq n_0$, $z \in \Omega_n$. Prove o:

Teorema de Weierstrass:

> *Assuma que $f_n(z)$ é analítica na região Ω_n , e que $f_n(z) \to f(z)$ em Ω, uniformemente em compactos.*
> *Então f' é analítica em Ω, e $f_n'(z) \to f'(z)$ uniformemente em compactos de Ω.*

5ª Questão:

Calcule

$$\int_0^\infty \frac{x^{c-1}}{(x+1)(x+2)} dx$$

onde $1 < c < 2$

Sugestão : Integre em torno de um disco suficientemente grande em torno da origem, menos uma vizinhança do semi-eixo dos reais positivos.

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA

Exame de Variáveis Complexas

Setembro de 1994

$1^{\underline{a}}$ Questão:

1) Mostre que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ converge uniformemente em $\overline{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$.
2) A série obtida derivando-se termo-a-termo a série acima converge uniformemente em $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$? Justifique.

$2^{\underline{a}}$ Questão:

1) Exiba uma aplicação bijetiva e analítica definida no disco unitário aberto $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ com valores no semiplano $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$.
2) Existe uma aplicação analítica e bijetiva do plano complexo $\mathbb{C}$ no disco unitário? Justifique.

$3^{\underline{a}}$ Questão:

Calcule $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$.

$4^{\underline{a}}$ Questão:

Assisinale se verdadeira ou falsa justificando sua resposta:

1) Se $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de funções holomorfas definidas no disco unitário $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ que converge uniformemente para f nas partes compactas de D, então f é holomorfa em D.
2) Existe f holomorfa e não-constante em um domínio U tal que

$$F(U) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = 0\}.$$

$5^{\underline{a}}$ Questão:

Seja $U \subset \mathbb{C}$ um domínio e suponha que $u\colon U \to \mathbb{R}$ satisfaz a seguinte propriedade:

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta$$

para todo $r > 0$ tal que $\overline{B_r(z_0)} \subset U$.

Mostre que se existe $z_0 \in U$ tal que $u(z_0) \geq u(z)\ \forall z \in U$, então u é constante.

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA

Exame de Variáveis Complexas

Março de 1995

1ª Questão:

Seja f analítica num domínio D. Prove que f é constante em D se $u = \Re f$ ou $v = \operatorname{Im} f$ ou $|f|$ ou $\operatorname{Arg} f$ é constante em D.

Prove também que f é constante em D se

$$h(u, v) = a_0u^2 + a_1uv + a_2v^2 + a_3u + a_4v$$

é constante em D, onde $a_i \in \mathbb{C}$.

2ª Questão:

Prove que se f é uma função inteira e $|f(z)| \geq 1$, $\forall z \in \mathbb{C}$, então f é constante.

3ª Questão:

Prove que as funções que são regulares em $\mathbb{C}$ e têm um pólo no ∞ são os polinômios de grau $n \geq 1$.

4ª Questão:

Calcule

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^6 + 1}\, dx$$

5ª Questão:

Prove o Teorema Fundamental da Álgebra.

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA

Exame de Variáveis Complexas

Setembro de 1995

1ª Questão:

Calcule

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + x^4}\, dx$$

2ª Questão:

Seja $D \subset \mathbb{C}$ um domínio e $\{f_n\}_{n\geq 0}$ uma sequência de funções analíticas tal que $f_n(z) \longrightarrow f(z)$ uniformemente nos compactos de D.

(i) Mostre que f é analítica.

(ii) Mostre que $f'(z) = \lim_{n\to+\infty} f_n'(z),\ \forall z \in D$.

3ª Questão:

Uma função $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é dita coerciva se $|f(z)| \longrightarrow +\infty$ quando $|z| \longrightarrow +\infty$. Seja f inteira e coerciva. Mostre que f é sobrejetiva.

(Sugestão: Mostre que $0 \in \operatorname{Im} f$).

4ª Questão:

Seja $D \in \mathbb{C}$ um domínio e f analítica em D. Mostre que f satisfaz o princípio da média, isto é, se $B_r(z_0) \in D$, então

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta$$

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA
Exame de Variáveis Complexas
Março de 1996

1ª Questão:

Integre

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$$

2ª Questão:

Ache uma transformação conforme levando o disco unitário na região $y < x^2$.

3ª Questão:

Seja g uma função analítica com a singularidade essencial em x. Seja U uma vizinhança de x. Mostre que todo $y \in \mathbb{C}$ é ponto de acamulação de $g(U)$.

4ª Questão:

Sejam $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}_*$ tais que $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{R}$. Seja f uma função meromorfa com períodos ω_1 e ω_2:

$$f(z) = f(z + \omega_1) = f(z + \omega_2), \ \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

Mostre que a soma dos resíduos de f é zero. Conclua que toda função meromorfa não constante com períodos ω_1 e ω_2 tem tantos pólos quanto zeros (contando com multiplicidade).

5ª Questão:

Seja $f(z)$ analítica na região anular $\Omega = \{1 < |z| < 2\}$. Assuma que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$. Mostre que existe um inteiro n e uma função analítica g em Ω tal que, para todo $z \in \Omega$, $f(z) = z^n e^{g(z)}$.

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA

Exame de Variáveis Complexas

Setembro de 1996

1ª Questão:

Prove o Teorema Fundamental da Álgebra.

2ª Questão:

Calcule $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}\,dx$.

3ª Questão:

Seja $f_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{z^k}{k}$, $z \in U$, onde U é o disco aberto unitário. Prove que (f_n) converge uniformemente sobre os compactos de U, mas não converge uniformemente sobre U.

4ª Questão:

Seja D um disco aberto e $\mathcal{A}$ o conjunto das funções $f\colon \overline{D} \to \mathbb{C}$ tais que $f|_D$ é holomorfa e $f|_{\partial D}$ é contínua. Prove que $\mathcal{A}$ é completo sob a métrica

$$d_u(f,g) := \sup |f-h|, \quad f, g \in \mathcal{A}.$$

5ª Questão:

Seja $\mathcal{E}$ o espaçovetorial das funções $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfas e $\mathcal{S}$ o espaço vetorial das sequências $(c_n)_{n\geq 0}$ em $\mathbb{C}$ tais que $|c_n|^{1/n} \longrightarrow 0$.

Prove que existe um isomorfismo (linear e bijetor) $T\colon \mathcal{E} \to \mathcal{S}$.

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA

Exame de Variáveis Complexas

Setembro de 1997

1ª Questão:

Sejam f e g analíticas em um aberto conexo Ω de $\mathbb{C}$ contendo o disco unitário centrado na origem. Suponha que

$$f'(a_n) = f(a_n)g'(a_n), \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

onde $a_n = \exp(i\pi n/4)/n$. Prove que existe uma constante complexa c tal que

$$f(z) = ce^{g(z)}, \qquad \forall z \in \Omega.$$

2ª Questão:

Seja Ω um aberto conexo limitado de $\mathbb{C}$ e sejam f e g funções analíticas em Ω e contínuas em $\overline{\Omega}$. Suponha que f e g não se anulam em Ω e são tais que $|f(z)| = |g(z)|$ para todo $z \in \partial\Omega$. Mostre que existe uma constante complexa λ com $|\lambda| = 1$ tal que $f(z) = \lambda g(z)$ em Ω.

3ª Questão:

(a) Seja $f(z)$ uma função analítica em $0 < |z| < 1$ tal que

$$\frac{c_1}{|z|^k} \leq |f(z)| \leq \frac{c_2}{|z|^m}, \qquad \forall z,\ 0 < |z| < \varepsilon,$$

onde $0 < \varepsilon \leq 1$, $0 < c_1 < c_2$ e $k \leq m$, $k, m \in \mathbb{N}$. Mostre que a origem é um pólo de ordem $n \in \mathbb{N}$ de f onde $k \leq n \leq m$.

(b) Seja $f(z)$ uma função analítica em $0 < |z - z_0| < 1$, onde $|z_0| < 1$, tal que

$$0 < \liminf_{z \to z_0} \left| \frac{f(z)}{g(z)} \right| \leq \limsup_{z \to z_0} \left| \frac{f(z)}{g(z)} \right| < \infty, \quad \text{onde} \quad g(z) = \frac{z^2 + z(1 - z_0) - z_0}{(z - z_0)^4 (z - 1)}.$$

Mostre que z_0 é um pólo de f e ache a ordem desse pólo.

4ª Questão:

Seja $\{f_n\}_n$ uma sequência de funções analíticas em um aberto Ω de $\mathbb{C}$ tal que a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente em Ω para uma função $f(z)$. Mostre que $f(z)$ é analítica em Ω e que

$$\frac{df}{dz} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{df_n}{dz} \quad \text{em } \Omega.$$

5ª Questão:

Calcule

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{x^2+1}\, dx,$$

onde $a > 0$.

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA

Exame de Variáveis Complexas

Setembro de 1998

1ª Questão:

Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma transformação conforme que leva circunferências em circunferências, preservando o raio. Mostre que f é da forma $f(z) = f(0) + e^{i\theta} z$, para algum $\theta \in [0, 2\pi)$.

2ª Questão:

Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $M, R > 0$.

(a) Se $f(z)$ é uma função inteira tal que $|f(z)| \leq M|z|^m$ para todo z tal que $|z| \geq R$, mostre que f é um polinômio.

(b) Se $f(z)$ uma função meromorfa em $\mathbb{C}$ tal que $|f(z)| \leq M|z|^m$ para todo z que não seja um pólo de f e tal que $|z| \geq R$, mostre que f é uma função racional.

3ª Questão:

Seja Ω um aberto simplesmente conexo de $\mathbb{C}$ e seja $(f_n)_n$ uma seqüência de funções analíticas tais que f_n' converge para uma função g em Ω, uniformemente nas partes compactas de Ω. Suponha, ainda, que para um certo $z_0 \in \mathbb{C}$, exista $w_0 \in \mathbb{C}$ tal que $f_n(z_0) \to w_0$, quando $n \to \infty$. Mostre que $(f_n)_n$ converge para uma função analítica f em Ω, uniformemente nas partes compactas de Ω.

4ª Questão:

Seja $u\colon D \to \mathbb{R}$ contínua, onde $D = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| \leq 1\}$. Mostre que se u é subharmônica, *i.e.*,

$$u(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta})\, d\theta, \qquad \forall z,\ |z| < 1, \quad \forall r,\ 0 < r < 1 - |z|,$$

então u satisfaz o princípio do máximo.

$5^{\underline{a}}$ Questão:

Calcule
$$\int_{|z|=1} (z^2 + 2z) \operatorname{cossec}^2(z)\, dz.$$

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA
Exame de Variáveis Complexas
Março de 1999

$1^{\underline{a}}$ Questão:

Sejam m um inteiro, M e R reais positivos e $f(z)$ uma função inteira tal que $|f(z)| \leq M|z|^m$ para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| \geq R$.

(a) Mostre que $f(z)$ é um polinômino.

(b) Mostre que se $|f(z_0)| = M|z_0|^m$ para algum $z_0 \in \mathbb{C}$ com $|z_0| > R$, então $f(z)$ é um monômio.

$2^{\underline{a}}$ Questão:

Seja Ω um aberto simplesmente conexo de $\mathbb{C}$ e seja $(f_n)_n$ uma seqüência de funções analíticas tais que f_n' converge para uma função g em Ω, uniformemente nas partes compactas de Ω. Suponha, ainda, que para um certo $z_0 \in \mathbb{C}$, exista $w_0 \in \mathbb{C}$ tal que $f_n(z_0) \to w_0$, quando $n \to \infty$. Mostre que $(f_n)_n$ converge para uma função analítica f em Ω, uniformemente nas partes compactas de Ω.

$3^{\underline{a}}$ Questão:

Seja $u\colon D \to \mathbb{R}$ contínua, onde $D = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| \leq 1\}$. Mostre que se é u subharmônica, *i.e.*,
$$u(z) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta})\, d\theta, \qquad \forall z,\ |z| < 1, \quad \forall r,\ 0 < r < 1 - |z|,$$
então u satisfaz o princípio do máximo.

$4^{\underline{a}}$ Questão:

Calcule
$$\int_{|z|=1} (z^2 + 2z) \operatorname{cossec}^2(z)\, dz.$$

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA

Exame de Variáveis Complexas

Setembro de 1999

1ª Questão:

Seja $z = 2 + 2i$. Determine a parte real e a parte imaginária das raízes sêxtuplas de z.

2ª Questão:

Analise as singularidades de f no plano complexo estendido, onde

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z(z-5)^2 \operatorname{sen}(iz+3)} \exp\left(\frac{1}{z-1}\right).$$

3ª Questão:

Mostre que

$$\int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

4ª Questão:

Considere f uma função analítica em um domínio U e tal que $z_0 \in U$ é o único zero da função f. Suponha que z_0 é zero de ordem 1 e que $B_r(z_0) \subset U$.

Mostre que

$$z_0 = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|z-z_0|=r} \frac{z f'(z)}{f(z)}\,dx.$$

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA

Exame de Variáveis Complexas

Março de 2000

1ª Questão:

Enuncie e demonstre o Teorema Fundamental da Álgebra.

2ª Questão:

Seja $f = u + \mathrm{i}v$ uma função inteira tal que $u(z) \leq 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Mostre que f é uma função constante.

$3^{\underline{a}}$ Questão:

Seja $D \subset \mathbb{C}$ um domínio e $\{f_n\}_{n\geq 0}$ uma seqüência de funções analíticas tal que $f_n \to f$ uniformemente nos compactos de D.

a) Mostre que f é analítica.
b) Mostre que $f'(z) = \lim_{n\to\infty} f_n'(z)$, $\forall z \in D$.

$4^{\underline{a}}$ Questão:

Classifique as singularidades de f no plano complexo estendido, onde:

$$f(z) = \frac{e^{1/z}}{1-z}.$$

Calcule

$$\int_\sigma f(z)\, dz,$$

onde

$$\sigma(t) = \begin{cases} 2e^{\mathrm{i}t} & \text{se } 0 \leq t < 2\pi, \\ \frac{-1}{2} + e^{\mathrm{i}t} & \text{se } 2\pi \leq t \leq 4\pi. \end{cases}$$

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA
Exame de Variáveis Complexas
Setembro de 2000

$1^{\underline{a}}$ Questão:

Calcule a seguinte integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}\, dx.$$

$2^{\underline{a}}$ Questão:

Determine as singularidades no plano complexo estendido de

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen} z \operatorname{sen}(1/z)}{\cos z^3 - 1}.$$

Diga se elas são removíveis, polos (indicando, neste caso, a ordem), ou essenciais.

$3^{\underline{a}}$ Questão:

Seja f uma função não-constante, holomorfa no disco fechado $|z - z_0| < r$, tal que a parte real $\Re f(z_0) = 0$. Mostre que $\Re f$ assume valores positivos e negativos no conjunto $|z - z_0| = r$.

4ª Questão:

Mostre que a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^k e^{-nz}$$

define uma função holomorfa no semiplano $\Re z > 0$.

5ª Questão:

Sejam $U \subset \mathbb{C}$ um aberto conexo e $f\colon U \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa não constante tal que para todo $z \in U$, $f(z) \neq 0$.

(a) Suponha que para todo caminho fechado e contínuo $\gamma \subset U$ vale

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = 0.$$

Prove que existe uma função holomorfa g tal que $e^{g(z)} = f(z)$ $\forall z \in U$;

(b) Prove a recíproca de (a);

(c) Seja $f = \prod_{i=1}^{M} (z - z_i)^{m_i}$, onde $z_i \neq z_j$ se $i \neq j$ e m_i's são inteiros não-nulos. Mostre que existe um ramo de $\log f$ definido em U se, e somente se,

$$\sum_{i=1}^{M} m_i n(\gamma, z_i) = 0,$$

onde

$$n(\gamma, z_i) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_i},$$

qualquer que seja o caminho fechado e contínuo γ em U;

Sugestão: Use (a) e (b)

(d) Esboce um domínio $U \subset \mathbb{C}$ no qual existe uma função holomorfa g tal que $e^{g(z)} = \dfrac{z+1}{z-1}$.

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA

Exame de Variáveis Complexas

Fevereiro de 2001

1ª Questão:

Determine o máximo do valor absoluto da função $z \mapsto z^7/(z^5 + 3)$ no disco $|z| \leq 1$.

2ª Questão:

Prove, pelo método dos resíduos, que

$$\int_0^{2\pi} (\operatorname{sen}\theta)^6 \, d\theta = \frac{5\pi}{8}.$$

3ª Questão:

Sejam f e g funções holomorfas na região $\Omega \subset \mathbb{C}$ que têm o mesmo valor absoluto em todos os pontos de Ω. Mostre que existe $c \in \mathbb{C}$, com $|c| = 1$, tal que $g(z) = cf(z)$ $\forall z \in \Omega$.

4ª Questão:

Considere a função meromorfa $\alpha(z) = \pi \operatorname{cotg} \pi z$.

(a) Determine os polos de α e suas respectivas multiplicidades.

(b) Calcule o resíduo de α em cada um dos seus polos.

(c) Dado o inteiro positivo n, considere o quadrado Q_n de vértices $\pm(n+1/2) \pm (n+1/2)\mathrm{i}$. Mostre que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q_n} \frac{1}{z^2} \alpha(z) \, dz = 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \operatorname{Res}\left(\frac{\alpha(z)}{z^2}, 0\right),$$

onde ∂Q_n é o bordo do quadrado orientado no sentido anti-horário.

(d) Mostre que

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\alpha(z)}{z^2}, 0\right) = -\frac{\pi^2}{3}.$$

(Sugestão: Use séries)

Comentário: Pode-se mostrar que a integral acima tende a zero, quando $n \to \infty$, donde se conclui que $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = \pi^2/6$. Este método se aplica ao cálculo de outras séries numéricas.

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA

Exame de Variáveis Complexas

Dezembro de 2001

1ª Questão:

Em cada item abaixo, indique se o resultado é falso ou verdadeiro e justifique.

(a) Se f é uma função meromorfa tal que a sua integral ao longo de qualquer curva fechada que não passa por por nenhum pólo de f se anula, então f só tem singularidades removíveis.

(b) Se Ω é um domínio obtido excluindo-se de $\mathbb{C}$ uma semireta partindo da origem, então é possível definir em Ω um ramo de $z^{1/3}$.

2ª Questão:

Seja $(f_n)_n$ uma seqüência de funções contínuas de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$ convergindo uniformemente em subconjuntos compactos para uma função f. Suponha que para toda curva simples parametrizada $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$, vale

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int_\gamma f_n(\zeta)\, d\zeta \right| \leq |\gamma(1) - \gamma(0)|.$$

Mostre que f é constante.

3ª Questão:

Sejam f e g duas funções analíticas em um domínio complexo Ω. suponha que $|f(z)g(z)|$ assuma um máximo em Ω. Mostre que ou f e g se anulam em Ω ou pelo menos uma dessas funções é identicamente nula.

4ª Questão:

Seja f uma função analítica definida em um domínio complexo Ω e possuindo exatamente dois zeros, um de ordem 2 e outro de ordem 5. Seja γ uma curva fechada simples em Ω que não passa por nenhum dos dois zeros de f. Determine os possíveis valores para o índice

$$\mathrm{Ind}(f(\gamma), 0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{f(\gamma)} \frac{dz}{z},$$

onde $g(\gamma)$ denota a curva obtida como imagem de γ por f.

5ª Questão:

Seja f uma função meromorfa em $\mathbb{C}$ com exatamente um pólo de ordem 1 na origem. Suponha que

$$\mathrm{Res}_{z=0}\, z^3 f(z)^3 = -8, \qquad \int_{|z|=2} \frac{f(z)(z^2+3z+2)}{z^2-1} dz = 20\pi \mathrm{i}.$$

Determine os possíveis valores de $f(1)$. Justifique a sua resposta.

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA
Exame de Variáveis Complexas
Dezembro de 2002

1ª Questão:

a) Em quais dos seguintes domínios D é possível definir um ramo de $\log(z)$? Justifique sua resposta.

(i) $D = \{z\,;\, 1 < |z| < e\} \setminus \{t\mathrm{i}\,;\, 1 < t < e\}$;

(ii) $D = \{z = x + \mathrm{i}y\,;\, x + y < 0\}$;

(iii) $D = \{z = x + \mathrm{i}y\,;\, 0 < |x| + |y| < 1\}$.

b) Considere o lugar geométrico dos pontos z do plano complexo satisfazendo uma equação do tipo $Az\bar{z} + Bz + \overline{B}\bar{z} + C = 0$, onde A e C são números reais e $|B|^2 - AC > 0$. Mostre que este lugar é um círculo quando $A \neq 0$ e uma reta no caso contrário.

2ª Questão:

Mostre que

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{4}.$$

3ª Questão:

Seja f uma função inteira com a propriedade que $|f(z)| \leq c|z|^\lambda + d$ para todo z, onde λ, c e d são constantes positivas. Prove que f é um polinômio em z cujo grau não excede λ.

4ª Questão:

Considere uma função inteira $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ satisfazendo $|f(z)| \to \infty$ quando $|z| \to \infty$. Prove que $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.

5ª Questão:

Suponha que D é um aberto, conexo e limitado do plano complexo e que $f\colon \overline{D} \to \mathbb{C}$ é uma função contínua, não-constante e analítica em D, que satisfaz $|f(z)| = 1$ para todo $z \in \partial D$. Prove que $f(z_0) = 0$ para algum $z_0 \in D$.
