EXAMES DE QUALIFICAÇÃO

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA

INSTITUTO DE MATEMÁTICA - UFRJ

Exames de Cálculo Avançado I e Álgebra Linear de 2003 a 2010

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA
Exame de Cálculo Avançado
Agosto de 2003

1ª Questão: Dentre as afirmativas abaixo, diga quais são falsas e quais são verdadeiras, fornecendo contra-exemplos para as falsas:

1. Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é tal que a derivada direcional $\dfrac{\partial f}{\partial u}(0,0) = 0$, em qualquer direção $u \in \mathbb{R}^2$, então f é diferenciável em $(0,0)$ e $\nabla f(0,0) \cdot u = 0$ para todo $u \in \mathbb{R}^2$;
2. Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é de classe $\mathcal{C}^1$ e $f(0,0) = 0$, então existem intervalos abertos I e J contendo as origens de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}$, respectivamente, e existe $g : I \to J$ tais que $f^{-1}(0) \cap I \times J = \{(x, g(x)), x \in I\}$;
3. Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ é contínua em $[a,b]$ e derivável no aberto (a,b), então existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = (f(b) - f(a))/(b-a)$;
4. Se M e N são espaços métricos e $f : M \to N$ é bijetiva e contínua, então a inversa f^{-1} é contínua.

2ª Questão: Seja $\{a_n\}_n$ uma sequência de Cauchy em um espaço métrico M possuindo uma subseqüência convergente $\{a_{n_k}\}_k$. Mostre que $\{a_n\}$ é convergente.

3ª Questão: Sejam $a, b, c > 0$ e $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x,y,z \geq 0, x^{3/2} + y^{3/2} + z^{3/2} = 1\}$. Calcule $\max\{ax + by + cz;\ (x,y,z) \in S\}$.

4ª Questão: Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$. Mostre que se $(a,b) \neq (0,0)$ e $(c,d) = f(a,b)$ então existem vizinhanças I de (a,b) e J de (c,d) e um homeomorfismo $g : I \to J$, com $g(a,b) = (c,d)$.

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA
Exame de Álgebra Linear
Agosto de 2003

1ª Questão: Sejam $M = \begin{bmatrix} a & e & 0 \\ f & b & g \\ 0 & h & c \end{bmatrix}$ e $N = \begin{bmatrix} a & e' & 0 \\ f' & b & g' \\ 0 & h' & c \end{bmatrix}$, com $e'f' = ef$ e $g'h' = gh$.
Mostre que M e N têm os mesmos autovalores.

2ª Questão: Seja $r = \{t(1, 1, \sqrt{2}),\ t \in \mathbb{R}\}$. Determine as matrizes (na base canônica de $\mathbb{R}^3$) das rotações de $30°$ em torno de r.

3ª Questão: Sejam E um espaço vetorial, $A : E \to E$ linear e v_1, v_2, v_3, v_4 vetores não nulos em E. Suponha que

$$\begin{aligned} Av_1 &= 3v_1 + v_2, \\ Av_2 &= 3v_2 + v_3, \\ Av_3 &= 3v_3 + v_4, \\ Av_4 &= 3v_4. \end{aligned}$$

Mostre que v_1, v_2, v_3, v_4 são linearmente independentes.

4ª Questão: Sejam E um espaço vetorial com produto interno e $A : E \to E$ linear. Mostre que A é normal se, e somente se, $|Av| = |A^*v|$, para todo $v \in E$, onde $|\cdot|$ denota a norma do produto interno.

5ª Questão: Seja $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linear e tal que $\langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle$, para todos $u, v \in \mathbb{R}^3$. Mostre que $\mathbb{R}^3$ tem uma base ortonormal de autovetores de A (i.e.: demonstre o Teorema Espectral neste caso particular).

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA
Exame de Cálculo Avançado
Agosto de 2004

1ª Questão: Seja X um subconjunto de $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Considere as afirmativas

(i) X é conexo;

(ii) Se $A \subset X$ for tal que $\partial A \cap X = \emptyset$ então $A = \emptyset$ ou $A = X$.

Mostre que (i) implica em (ii) mas que (ii) não implica em (i).

2ª Questão: Indique se as afirmativas abaixo são verdadeiras ou falsas e dê um contra-exemplo para as falsas.

(i) Sendo $f :]a,b[\to \mathbb{R}^n$ diferenciável, existe $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$;

(ii) Sendo $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $a \in A$, $f : A \to \mathbb{R}^n$ diferenciável e $f'(a)$ um isomorfismo, existe uma vizinhança aberta U de a tal que $f : U \to f(U)$ é bijetiva;

(iii) Sendo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que existem $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{0}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t\mathbf{e}_i)-f(\mathbf{0})}{t}$, $i = 1, \ldots, n$, então f é diferenciável em $\mathbf{0}$;

(iv) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é contínua se e somente se $G(f) \stackrel{\text{def}}{=} \{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})); \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$ é convexo.

3ª Questão: [Transformada de Legendre em uma dimensão] Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, estritamente convexa e com $\lim_{|r|\to\infty} \frac{g(r)}{|r|} = \infty$. Mostre que

(i) A derivada g' é inversível;

(ii) A função $g^*(s) \stackrel{\text{def}}{=} sr(s) - g(r(s))$, onde $r(s)$ é a inversa de g', é continuamente diferenciável, estritamente convexa e satisfaz $\lim_{|s|\to\infty} \frac{g^*(s)}{|s|} = \infty$;

(iii) Aplicando o mesmo procedimento à função convexa g^* obtemos $g^{**} = g$.

4ª Questão: Seja f de classe $\mathcal{C}^1$ definida por $f(x,y,p) = |x|^p + |y|^p$ em $\mathbb{R}^2 \times [1, +\infty[$. Mostre que existe $\delta > 0$ e uma única $\varphi : B_\delta(2,2) \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ tal que

$$\varphi(2,2) = 2 \qquad \text{e} \qquad |x|^{\varphi(x,y)} + |y|^{\varphi(x,y)} = 8, \quad \forall (x,y) \in B_\delta(2,2).$$

5ª Questão: Seja $p > 1$ e seja $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ |x_1|^p + \cdots + |x_n|^p = 1\}$. Seja $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ e seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$. Calcule $\max_{\mathbf{x}\in S} T(\mathbf{x})$ e mostre que para p^* dado por $1/p + 1/p^* = 1$, temos

$$|x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n| \le \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^{p^*} \right)^{1/p^*}, \qquad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

6ª Questão: Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável tal que $f(\mathbf{0}) = 0$ e $\operatorname{supp} f \subset B_1(\mathbf{0})$. Para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, considere

$$F(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t\mathbf{x}) \, \mathrm{d}t.$$

(i) Mostre que $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função par e contínua em $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$;

(ii) Mostre que $|F(\mathbf{x})| \leq \frac{2\|f\|_\infty}{|\mathbf{x}|}$ para todo $x \neq 0$ e conclua que $\lim_{|\mathbf{x}|\to\infty} f(\mathbf{x}) = 0$;

(iii) Mostre que $F(\mathbf{x}) = rF(r\mathbf{x})$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\forall r > 0$;

(iv) Dê condições sobre f para que (a) $\lim_{\mathbf{x}\to 0} F(\mathbf{x}) = \infty$, (b) $\lim_{\mathbf{x}\to 0} F(\mathbf{x})$ não exista e (c) $\lim_{\mathbf{x}\to 0} F(\mathbf{x}) = 0$.

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA
Exame de Álgebra Linear
Agosto de 2004

1ª Questão: Seja E um espaço vetorial com produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ e sejam $e_1,\dots,e_n$ vetores unitários e ortogonais dois a dois em E. Seja $v \in E$ e seja

$$\tilde{v} = \sum_{i=1}^{n} \langle v, e_i\rangle e_i.$$

Mostre que $|\tilde{v}| \leq |v|$, onde $|\cdot|$ é a norma associada ao produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

2ª Questão: Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear, $n, m \in \mathbb{N}$. Mostre que $\dim N(T) + \dim I(T) = n$, onde $N(T)$ e $I(T)$ são o núcleo e a imagem de T, respectivamente.

3ª Questão: Dado um vetor não-nulo $\boldsymbol{\omega}$ em $\mathbb{R}^3$, denote por $R(\boldsymbol{\omega})$ a matriz de rotação de um ângulo $\omega = |\boldsymbol{\omega}|$ em torno do eixo gerado por $\boldsymbol{\omega}$ e seguindo a regra da mão direita em relação ao sentido de $\boldsymbol{\omega}$. Mostre que para um vetor qualquer $\mathbf{x}$ em $\mathbb{R}^3$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(R(t\boldsymbol{\omega})\mathbf{x}) = \boldsymbol{\omega} \times R(t\boldsymbol{\omega})\mathbf{x}, \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

4ª Questão: Considere uma matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \in \mathbb{N}$. Suponha que existam um conjunto ortonormal de autovetores $\{\phi_j\}_{j=1}^{J}$ de A e um conjunto ortonormal de autovetores $\{\psi_j\}_{j=1}^{J}$, da adjunta A^* de A, com $\{\phi_j\}_{j=1}^{J}$ gerando todos os autovetores de A e com

$$\langle\phi_i, \psi_j\rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots J,$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker. Mostre que A é diagonalizável e que $\{\phi_j\}_{j=1,\dots J}$ é uma base de $\mathbb{C}^n$ que diagonaliza A

5ª Questão: Seja E um espaço vetorial real de dimensão finita com produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Seja $T : E \to E$ linear tal que

$$\langle u, v\rangle = 0 \text{ e } \langle u, Tv\rangle > 0 \Longrightarrow \langle Tu, v\rangle > 0.$$

Mostre que E tem base ortonormal de autovetores de T e que T é simétrica.

6ª Questão: Seja E espaço vetorial com produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Sejam $u_1,\dots,u_k \in E$. Considere a matrix de Grahm

$$A = \begin{bmatrix} \langle u_1,u_1\rangle & \langle u_1,u_2\rangle & \cdots & \langle u_1,u_k\rangle \\ \langle u_2,u_1\rangle & \langle u_2,u_2\rangle & \cdots & \langle u_2,u_k\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle u_k,u_1\rangle & \langle u_k,u_2\rangle & \cdots & \langle u_k,u_k\rangle \end{bmatrix}.$$

Mostre que $\det A = 0$ se e somente se $\{u_1,\dots,u_k\}$ é linearmente dependente.

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA
Exame de Cálculo Avançado
Fevereiro de 2005

1ª Questão: Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto e $f : K \to f(K)$ contínua e injetiva. Mostre que f^{-1} é contínua.

2ª Questão: Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$. Mostre que $\langle x, y \rangle \leq |x||y|$. Mostre, ainda, que $\langle x, y \rangle = |x||y|$ se e somente se x e y são linearmente dependentes.

3ª Questão: Seja M_n o espaço das matrizes $n \times n$ munido de alguma norma. Considere $A_0 \in M_n$ diagonalizável, com todos os seus autovalores simples. Mostre que existe uma vizinhança $\mathcal{O}$ de A_0 tal que, se $A \in \mathcal{O}$, então A é diagonalizável, com todos os seus autovalores simples.

4ª Questão: Considere $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ o espaço das transformações lineares $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ munido da norma $\|S\| = \sup\limits_{|x|=1} |Sx|$. Sejam $A, T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

1. Suponha que $\|T\| < 1$. Mostre que $I - T$ é invertível.
2. Suponha que A seja invertível e que $\|T\| < \|A^{-1}\|^{-1}$. Mostre que $A - T$ é invertível.

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA
Exame de Álgebra Linear
Fevereiro de 2005

1ª Questão: Seja $N \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ matriz nilpotente (i.e. existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $N^k = 0$). Mostre que $I - N$ é invertível e calcule a sua inversa.

2ª Questão: Seja $S \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ anti-hermitiana (i.e. $S^* = -S$).

1. Mostre que $I - S$ é invertível.
2. Mostre que $U = (I - S)^{-1}(I + S)$ é unitária (i.e. $U^*U = UU^* = I$).

3ª Questão: Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $n > 1$. Mostre que T tem um subespaço invariante de dimensão 2.

4ª Questão: Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\langle u, v\rangle = 0,\ \langle Tu, v\rangle > 0 \Longrightarrow \langle u, Tv\rangle > 0. \qquad (*)$$

1. Mostre que $\langle u, v\rangle = 0,\ \langle Tu, v\rangle = 0 \Longrightarrow \langle u, Tv\rangle = 0$.
2. Queremos mostrar que $(*)$ implica que T tem uma base ortonormal de autovalores. Admita que isto seja verdadeiro para $n = 2$. Mostre que isto é verdadeiro para $n > 2$ (sugestão: use a questão anterior).
3. Prove o caso $n = 2$ do item anterior.

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA
Exame de Cálculo Avançado
Agosto de 2005

1ª Questão: Seja $f : I \to \mathbb{R}$ convexa. Dado $x_0 \in I^\circ$, tome $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < x_0 < b$ e $[a, b] \subset I$. Defina

$$g(x) = \frac{(x - x_0)f(b) + (b - x)f(x_0)}{b - x_0}$$

e

$$h(x) = \frac{(x_0 - x)f(a) + (x - a)f(x_0)}{x_0 - a}.$$

(i) Mostre que

$$\min\{g(x), h(x)\} \leq f(x) \leq \max\{g(x), h(x)\} \quad \forall x \in [a, b].$$

(ii) Conclua que f é contínua em x_0.

2ª Questão: Dado um subconjunto não-vazio A de $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, considere a função distância $d_A(x) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$, $x \in \mathbb{R}^n$, onde $\| \cdot \|$ é uma norma qualquer em $\mathbb{R}^n$.

(i) Mostre que $d_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é Lipschitz contínua.

(ii) [**Versão para espaços métricos do Lema de Uryshon**] Se A e B são conjuntos não-vazios fechados disjuntos em $\mathbb{R}^n$, mostre que

$$\varphi(x) = \frac{d_A(x)}{d_A(x) + d_B(x)}$$

está bem definido para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e que a função $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tem as seguintes propriedades: φ é contínua; $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$; $\varphi(x) = 1$ se e somente se $x \in B$; e $\varphi(x) = 0$ se e somente se $x \in A$.

(iii) Considerando A, B e φ como no item (ii), mostre que φ é Lipschitz contínua se e somente se $\inf_{a \in A, b \in B} \|a - b\| > 0$.

3ª Questão: Dada $f : S^m \to \mathbb{R}^n$, seja $F : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^n$ a *extensão radial* de f definida por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0, \\ |x| f\left(\dfrac{x}{|x|}\right) & \text{se } x \neq 0. \end{cases}$$

Mostre que F é diferenciável em 0 se, e somente se, F é linear.

4ª Questão: Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciável e tal que $\nabla f(x) \cdot x > 0$ se $\|x\| = 1$. Mostre que existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|x_0\| < 1$ e $\nabla f(x_0) = 0$.

5ª Questão: Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$. Assuma $Df(x)$ invertível para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $f^{-1}(K)$ compacto para todo $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto.

(i) Mostre que $f(\mathbb{R}^n)$ é aberto.

(ii) Mostre que $f(\mathbb{R}^n)$ é fechado.

(iii) Mostre que f é sobrejetiva.

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA
Exame de Álgebra Linear
Agosto de 2005

1ª Questão:

1. Seja $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $A^k = I$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Prove que A é diagonalizável.
2. Se considerarmos $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, o mesmo resultado ainda vale? Prove ou dê um contra-exemplo.

2ª Questão: Seja $A \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ tal que

- $A^2 - 5A + 6I$ é singular;
- $\dim(N(A)) = 1$;
- $\mathrm{tr}(A) = 16$;
- $(\lambda - 4)^3$ divide $p_c^A(\lambda)$ e
- $\mathrm{grau}(p_m^A) = 4$,

onde p_m^A denota o polinômio mínimo de A e p_c^A, o polinômio característico de A. Quais as possíveis formas canônicas de Jordan de A (a menos da ordem dos blocos de Jordan)?

3ª Questão: Seja V o espaço vetorial de polinômios reais da forma $p(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c reais, munido do produto interno

$$\langle p, q \rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} p(x)q(x)\ \mathrm{d}x.$$

1. Encontre uma base ortogonal de V composta de polinômios p_0, p_1 e p_2 de graus 0, 1 e 2, respectivamente.
2. Encontre um polinômio $q \in V$ que satisfaz o seguinte problema de otimização:

$$\int_{-1}^{1} \left(q(x) - x^3\right)^2\ \mathrm{d}x = \min_{p\in V} \int_{-1}^{1} \left(p(x) - x^3\right)^2\ \mathrm{d}x.$$

3. A solução do item (2) é única?

4ª Questão:

1. Dados n números complexos distintos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ e n vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$, dê condições necessárias e suficientes para a existência de uma matriz complexa *hermitiana* A, de tamanho $n \times n$, cujos autovalores e respectivos autovetores sejam λ_i e v_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.
2. Resolva novamente o item (1), substituindo *hermitiana* por *unitária*.

5ª Questão: Seja V espaço vetorial complexo de dimensão finita, com $\dim(V) \geq 2$. Seja $A \in \mathcal{L}(V,V)$ transformação linear de V em V. Defina o subespaço vetorial

$$\mathcal{K}_A = \{M \in \mathcal{L}(V,V) \ \mid \ M = p(A), \ \ p \in \mathcal{P}\},$$

onde $\mathcal{P}$ é o conjunto dos polinômios complexos.

1. Prove que $\mathcal{K}_A \neq \mathcal{L}(V,V)$.
2. Prove que se A é invertível então $A^{-1} \in \mathcal{K}_A$.

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA
Exame de Cálculo Avançado
Março de 2006

1ª Questão: Seja $\otimes$ o produto vetorial em $\mathbb{R}^3$. Seja $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(u, v) = u \otimes v$. Calcule $f'(u, v)$ para $(u, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.

2ª Questão: Seja $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto e seja $f : K \to \mathbb{R}^M$ contínua, $N, M \in \mathbb{N}$. Prove que f é uniformemente contínua.

3ª Questão: Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável e tal que $\|f'(x)\| \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}^2$, onde $\|f'(x)\| = \sup_{|h|=1} |f'(x)h|$ e $|\cdot|$ denota a norma euclidiana em $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$. É verdade que

$$|f(3, 3) - f(2, 2)| \geq \sqrt{2} \ ?$$

4ª Questão: Sejam Ω aberto em $\mathbb{R}^3$ e $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Seja S a superfície de nível correspondente a $\varphi(x, y, z) = c$, onde c é um número real fixo. Sob que hipóteses podemos, na vizinhança de (x_0, y_0, z_0) em S, escrever S simultaneamente nas formas $x = f(y, z)$, $y = g(x, z)$ e $h = g(x, y)$ com f, g e h de classe $\mathcal{C}^1$? Prove que, sob estas hipóteses, vale, no ponto (x_0, y_0, z_0),

$$\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = -1.$$

5ª Questão: Dê exemplo de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável em 0, com $f'(0) \neq 0$, mas tal que f não é difeomorfismo entre U e V para qualquer par U e V de vizinhanças de 0 e de $f(0)$, respectivamente. Use seu exemplo para criar um novo exemplo, agora com $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Explique por que isto não contradiz o Teorema da Função Inversa.

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA
Exame de Álgebra Linear
Março de 2006

1ª Questão: Considere

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Determine P in invertível tal que $A = P^{-1}BP$.

2ª Questão: Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. Mostre que T e $2T$ são similares se e só se T é nilpotente.

3ª Questão: Uma transformação linear $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ é dita positiva definida se $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

1. Suponha T positiva definida e simétrica. Mostre que se $\langle Tx, x\rangle = 0$ então $Tx = 0$.
2. Dê um exemplo de T positiva definida tal que $\langle Tx, x\rangle = 0$ e $Tx \neq 0$ para algum $x \in \mathbb{R}^n$.
3. Suponha T positiva definida. Mostre que $Tx = 0$ se e só se $T^t x = 0$. (Sugestão: use (1).)
4. Dê um exemplo de T tal que $Tx = 0$ mas $T^t x \neq 0$ para algum $x \in \mathbb{R}^n$.

4ª Questão: Sejam $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ diagonalizável e $V \in \mathbb{C}^n$ um subespaço invariante sob T. Mostre que $S = T|_V$, a restrição de T a V, é diagonalizável. (Sugestão: suponha que S não seja diagonalizável e mostre então que T não é diagonalizável.)

5ª Questão: Seja $\mathcal{M}_n$ o espaço das matrizes reais $n \times n$. Definimos o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em $\mathcal{M}_n$ da seguinte forma: se $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, $B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ são elementos de $\mathcal{M}_n$, então

$$\langle A, B\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}.$$

Dado $B \in \mathcal{M}_n$, seja $T_B : \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_n$ dada por $T_B(A) = BA$ para todo $A \in \mathcal{M}_n$.

1. Mostre que T_B é linear.
2. Mostre que $(T_B)^t = T_B$.
3. Mostre que T_B é unitária se e só se B é unitária.
4. Mostre que T_B é invertível se e só se B é invertível, e que, neste caso, $(T_B)^{-1} = T_{B^{-1}}$.
5. Mostre que os polinômios mínimos de B e de T_B coincidem.
6. Mostre que os espectros de B e de T_B coincidem.

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA
Exame de Cálculo Avançado
Março de 2007

1ª Questão: Seja $n \in \mathbb{N}$ e considere a função distância de Hausdorf definida por $\delta(A,B) = \mathrm{d}(A,B) + \mathrm{d}(B,A)$, onde $\mathrm{d}(A,B) = \sup_{a\in A} \inf_{b\in B} \|a-b\|$, $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Seja

$$\mathcal{F} = \{ \text{ subconjuntos fechados não-vazios de } \mathbb{R}^n\}.$$

Mostre que $(\mathcal{F}, \delta)$ é um "espaço métrico", ou seja, as seguintes propriedades são válidas:

(i) $\delta(A,B) = \delta(B,A) \geq 0$ e $\delta(A,B) = 0$ se e somente se $A = B$, onde $A, B \in \mathcal{F}$.

(ii) $\delta(A,B) \leq \delta(A,C) + \delta(C,B)$, para quaisquer $A, B, C \in \mathcal{F}$.

2ª Questão: Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $n, m \in \mathbb{N}$, contínua e homogênea de grau $p \geq 0$ (i.e. $f(\lambda x) = \lambda^p f(x)$, para todos $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda > 0$). Mostre que se f é aberta (i.e. f leva aberto de $\mathbb{R}^n$ em aberto de $\mathbb{R}^m$) então f é sobrejetiva e que a recíproca não é verdadeira. Mostre, ainda, que a recíproca é verdadeira no caso particular de f ser linear.

3ª Questão: Seja $\mathcal{M}$ o conjunto das matrizes $n \times n$ e $I \in \mathcal{M}$ a matriz identidade. Considere $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ definida por $f(M) = \det(M)$. Prove que $f'(I)M = \text{Traço}(M)$. [Dica: f é multilinear.]

4ª Questão: Seja $f : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, diferenciável e tal que existe

$$\alpha : \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \qquad \nabla f(x) = \alpha(x)x, \ \forall x \neq 0.$$

(i) Mostre que existe $\beta : [0, \infty[\to \mathbb{R}^N$, derivável em $]0, \infty[$, tal que $f(x) = \beta(|x|), \forall x \in \mathbb{R}$.

(ii) β é contínua em 0? É derivável?

5ª Questão: Sejam Ω aberto de $\mathbb{R}^2$ e $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^3$ de classe $\mathcal{C}^2$. Seja $a \in \Omega$ tal que $\varphi(a) = b$ e suponha que $\varphi'(a)$ tem posto 2. Considere $T = \varphi'(a)(\mathbb{R}^2)$, que é chamado de plano tangente à imagem de φ em b.

(i) Se $u \in \mathbb{R}^2$, $\varepsilon > 0$ e c_1, c_2 $:] - \varepsilon, \varepsilon[\to \Omega$ são tais que $c_1(0) = c_2(0) = a$ e $\dot{c}_1(0) = \dot{c}_2(0) = u$, mostre que

$$\frac{d}{dt}(\varphi(c_1(t))_{t=0} = \frac{d}{dt}(\varphi(c_2(t))_{t=0}.$$

(ii) Fixe um vetor n de $\mathbb{R}^3$ unitário e normal a T e defina $\alpha : T \to \mathbb{R}$ da seguinte forma: para cada v em T, tome $u \in \mathbb{R}^2$ tal que $\varphi'(a)u = v$, $\varepsilon > 0$ e considere $c :] - \varepsilon, \varepsilon[\to \Omega$ tal que $c(0) = a$ e $\dot{c}(0) = u$; faça $\gamma(t) = \varphi(c(t))$ e

$$\alpha(v) = \langle \frac{d^2\gamma}{dt^2}(0), n\rangle.$$

Mostre que α está bem definida e é quadrática em v. Mostre que existe $A : T \to T$ linear e simétrica tal que $\alpha(v) = \langle Av, v\rangle$, $\forall v \in T$ (os autovalores de A são chamados de curvaturas principais de φ em b e o produto deles, que é o determinante de A, é a curvatura gaussiana de φ em b).

(iii) Sejam π_i, para $i = 1, 2, 3$, as projeções canônicas de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^2$ ($\pi_2(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_3)$, por exemplo). Mostre que, para algum i, a composição $\pi_i \circ \varphi$ é um difeomorfismo ψ entre uma vizinhança U de a e uma vizinhança V de $\pi_i(b)$. Conclua que existe $f : V \to \mathbb{R}^3$ tal que $\varphi(x) = f(\psi(x))$, $\forall x \in U$.

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA
Exame de Álgebra Linear
Março de 2007

1ª Questão: Seja L uma matriz quadrada complexa tal que $P = \lim_{k\to\infty} L^k$ existe. Mostre que

(i) P é uma projeção.

(ii) A imagem e o núcleo de P são subespaços invariantes por L.

(iii) L restrito à imagem de P é a identidade.

2ª Questão: Sejam A e B duas matrizes quadradas complexas de mesma dimensão satisfazendo $AB = BA$. Responda se cada afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa, incluindo uma demonstração ou um contra-exemplo, dependendo do caso.

(i) Se uma das matrizes é diagonalizável, então a outra também é e existe uma base que diagonaliza as duas matrizes simultaneamente.

(ii) A e B são diagonalizáveis se e somente se AB é diagonalizável.

3ª Questão: Sejam V um espaço vetorial complexo de dimensão finita e $N : V \to V$ uma transformação linear nilpotente, isto é, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $N^k \equiv 0$. Defina $W_j = \text{Kernel}(N^j)$ para $j \in \mathbb{N}$. Prove que

(i) $W_1 \subset \cdots \subset W_k = W_{k+j}$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

(ii) O menor k tal que $N^k \equiv 0$ satisfaz $k \leq \text{dim}V$.

(iii) Se $W_m = W_{m+1}$ então $W_m = W_{m+j}$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

(iv) Existe uma base para V tal que N nesta base é triangular superior com diagonal nula.

4ª Questão: Sejam V um espaço vetorial real de dimensão finita, $v \in V$ não-nulo e $T : V \to V$ uma transformação linear.

(i) Prove que existe um polinômio com coeficientes reais $p(x)$ de grau menor ou igual a $\text{dim}V$ tal que $p(T)v = 0$. [Dica: Considere o conjunto $v, Tv, T^2v, \ldots$.]

(ii) Prove que uma das raizes de $p(x)$ é um autovalor de T. [Dica: Utilize o Teorema Fundamental da Álgebra e fatore o polinômio].

5ª Questão: Suponha que T seja uma transformação linear autoadjunta e positiva definida em um espaço vetorial real V de dimensão finita. Prove que existe uma transformação linear S em V tal que $S^2 = T$.

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA
Exame de Cálculo Avançado
Março de 2008

1ª Questão: Justifique ou apresente contra-exemplos:

(i) Se A e B são fechados e $d(A,B)=0$ então $A\cap B\neq\emptyset$ (lembre que a distância entre dois conjuntos é dada por $d(A,B)=\inf\{d(x,y),x\in A,y\in B\}$).

- Se A é fechado e B é compacto com $d(A,B)=0$ então $A\cap B\neq\emptyset$

(ii) Se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tem derivada em todos os pontos então f' é contínua

2ª Questão: Seja $U\subset\mathbb{R}^N$ um conjunto aberto, limitado e convexo. Seja $f:U\to\mathbb{R}$ contínua com gradiente limitado.

(i) Mostre que f pode ser estendida a $\overline{U}$ de forma contínua.

(ii) Mostre que a hipótese de convexidade não pode ser retirada, isto é, existe $U\subset\mathbb{R}^N$ conjunto aberto, limitado e não convexo e uma função f contínua com gradiente contínuo e limitado que não pode ser estendida continuamente ao fecho de U

(iii) Mostre que a hipótese de função com derivada limitada também não pode ser retirada, isto é, existe U aberto, limitado e conexo e função f contínua, diferenciável em todos os pontos, mas cujo gradiente não é limitado e que não pode ser estendida de forma contínua a $\overline{U}$.

3ª Questão: Seja $U\subset\mathbb{R}^N$ aberto conexo e $f:U\to\mathbb{R}^N\setminus\{\mathbf{0}\}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

(i) Seja $h(x)=(f(x),f(x))$. Mostre que $h'(x).k=2((f'(x).k),f(x))$ para todo $k\in\mathbb{R}^N$ (onde '.' significa aplicação).

(ii) Considere que a imagem de f não contém $\mathbf{0}$. Mostre que $\|f(x)\|$ é constante se, e somente se, $f'(x).k$ é ortogonal a $f(x)$ para todo x e h pertencentes ao $\mathbb{R}^N$.

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA
Exame de Álgebra Linear
Março de 2008

1ª Questão: Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita. Seja $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Prove que T é sobrejetiva se, e somente se, existe $S \in \mathcal{L}(W, V)$ tal que TS é o operador identidade em W.

2ª Questão: Prove os seguintes resultados:

(a) Se V é espaço vetorial de dimensão finita, S e T pertencem a $\mathcal{L}(V)$ e são tais que $ST = TS$ então $\mathcal{N}(T - \lambda I)$ é invariante sob S para todo $\lambda \in \mathbb{C}$

(b) Se V é espaço vetorial de dimensão finita, S e T pertencem a $\mathcal{L}(V)$. Mostre que ST e TS tem os mesmos autovalores

3ª Questão: Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ tal que $\dim \mathcal{N}\left((T - 2I)^3\right) = 4$ e $\dim \mathcal{N}\left((T - 2I)^2\right) = 3$. Faça o que se pede:

- Apresente a matriz de Jordan de T
- Apresente a matriz de e^T na mesma base que o item anterior
  (obs: $e^T = I + \sum_{i=1}^{\infty} T^i/i!$)

4ª Questão: Suponha que V é espaço vetorial complexo de dimensão finita, S é operador auto-adjunto, $\lambda \in \mathbb{C}$ e $\epsilon > 0$. Prove que se existe $v \in V$ tal que $\|v\| = 1$ e $\|Tv - \mu v\| < \epsilon$, então T tem um autovalor λ tal que $|\lambda - \mu| < \epsilon$

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA
Exame de Cálculo Avançado
Março de 2009

1ª Questão: Mostre que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é contínua se, e somente se, para todo $X \subset \mathbb{R}^n$, $f(\overline{X}) \subset \overline{f(X)}$.

2ª Questão: Seja $V = \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ o conjunto de todas as matrizes quadradas de ordem N e $f : V \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(X) = \text{traço}(XX^T)$. Mostre que f é diferenciável em V e calcule $f'(X)$.

3ª Questão: Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável em Ω. Mostre que se f é de classe C^2 em $x_0 \in \Omega$, então a matriz hessiana $[f''(x_0)]$ é simétrica. A hipótese "C^2 em x_0" é necessária? Justifique sua resposta.

4ª Questão: Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = xy + \frac{1}{2}e^{-(x^2+y^2)}$$

e seja $C = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, f(x,y) = 1\big\}$.

(a) Mostre que C é uma curva (isto é, que numa vizinhança de cada um de seus pontos, C é gráfico de uma função).

(b) Mostre que C não é conexo.

5ª Questão: Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 e considere $\phi(x) = f(x) - x$. Mostre que se ϕ é uma contração (isto é, $\|\phi(x) - \phi(y)\| \leq \kappa\|x - y\|$, $0 \leq \kappa < 1$), então f é um difeomorfismo de classe C^1.

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA
Exame de Álgebra Linear
Março de 2009

1ª Questão: Seja $A : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ um operador auto-adjunto. Mostre que A é não-negativo se e somente se todos os autovalores são maiores ou iguais a zero.

2ª Questão: Seja $\mathcal{S}$ o subespaço das matrizes reais simétricas 3×3. Para cada $B \in \mathcal{S}$, seja T_B a aplicação $T_B : \mathbb{R}^7 \to \mathcal{S}$ definida por $T_B(x_1, \ldots, x_7) = x_1 I + x_2 B + \cdots + x_7 B^6$. Mostre que, para qualquer $B \in \mathcal{S}$, o núcleo de T_B tem dimensão maior que zero.

3ª Questão: Seja E um espaço vetorial sobre o corpo K ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Prove que $L \in \mathcal{L}(E)$ é uma homotetia (isto é, existe $\lambda \in K$ tal que $L(x) = \lambda x$) se, e somente se, para todo $x \in E$, a família $(x, L(x))$ não é linearmente independente.

4ª Questão: Seja $\mathcal{M}_n(K)$ o espaço das matrizes $n \times n$ (sobre o corpo $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), munido da norma

$$\|A\| = \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{n} |a_{ij}|, \quad \text{se} \quad A = [a_{ij}]_{1 \le i,j \le n}.$$

e $GL_n(K) \subset \mathcal{M}_n(K)$ o conjunto das matrizes invertíveis. Mostre que $GL_n(K)$ é aberto e denso em $\mathcal{M}_n(K)$.

5ª Questão: Seja E um espaço vetorial real munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $x_1, \ldots, x_n \in E$. A matriz $M = [a_{ij}]_{1 \le i,j \le n}$, onde $a_{ij} = \langle x_i, x_j \rangle$, é denominada matriz de Gram dos vetores $x_1, \ldots, x_n$ e $G(x_1, \ldots, x_n) = \det M$ o respectivo determinante de Gram.

(1) Prove que M é simétrica e positiva (isto é, $y^T M y \ge 0$, para todo $y \in \mathbb{R}^n$);

(2) Mostre que $(x_1, \ldots, x_n)$ é linearmente independente se, e somente se, M é invertível.

(3) Suponha E um espaço de Hilbert, seja V um subespaço de E de dimensão n e $x \in E$. Considere uma base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ (não necessariamente ortogonal) de V e defina $d = \inf_{y \in V} \|x - y\|$. Prove que

$$d^2 = \frac{G(e_1, \ldots, e_n, x)}{G(e_1, \ldots, e_n)}.$$

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA
Exame de Cálculo Avançado
Agosto de 2009

1ª Questão: Verifique que a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) := sen\, y - xy + x^2$$

define, através da equação $f(x,y) = 0$, a variável y como função φ de x em uma vizinhança de $(0,0)$. Determine o polinômio de Taylor de φ de grau 2 com respeito ao ponto inicial $x = 0$.

2ª Questão: Seja $Mat(\mathbb{R}, n)$ o espaço das matrizes reais $n \times n$.

1. Seja $det : Mat(\mathbb{R}, n) \to \mathbb{R}$ a função determinante. Compute a diferencial de det em $A \in Mat(\mathbb{R}, n)$.
2. Seja $Q : Mat(\mathbb{R}, n) \to Mat(\mathbb{R}, n)$ a função definida por $Q(A) := A^2$. Mostre que Q é localmente invertível ao redor da matriz identidade I.

3ª Questão: Dada a função $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 3z^2$, prove que existe o mínimo de f em $S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Determine o valor do mínimo.

4ª Questão: Mostre que a função $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x+y)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

não é contínua em $(0,0)$.

5ª Questão: Mostre que a função $1/x$ definida em $(0,1)$ não é uniformemente contínua.

6ª Questão: Encontre uma função que dê o mínimo absoluto, em $E = C^2([0,1], \mathbb{R})$, de

$$I(y) = \int_0^1 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx$$

com condições de contorno:

1. $y(0) = y(1) = 0$.
2. $y(0) = 0, \ y(1) = 1$.

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA
Exame de Álgebra Linear
Agosto de 2009

1ª Questão: Sejam N_1 e N_2 duas matrizes 6×6 nilpotentes com coeficientes em um corpo $\mathbb{K}$. Suponha que N_1 e N_2 tenham o mesmo polinômio mínimo e o mesmo posto.

1. Mostre que N_1 e N_2 são similares.
2. Mostre que o resultado acima não é verdadeiro para matrizes 7×7.

2ª Questão:

1. Seja N uma matriz complexa 3×3 nilpotente. Mostre que
$$A := I + \frac{1}{2}N - \frac{1}{8}N^2$$
é uma raiz quadrada de $I+N$.
2. Use a série de Taylor de $(1+t)^{1/2}$ para obter uma fórmula similar para uma raiz quadrada de $I+N$ com N matriz complexa nilpotente $n\times n$.
3. Mostre que cada matriz complexa não singular $n\times n$ possui uma raiz quadrada.

3ª Questão: Seja P_n o espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a n com coeficientes em um corpo $\mathbb{K}$. Compute o polinômio mínimo de:

1. O operador de derivação $D : P_n \to P_n$.
2. O operador de translação $T : P_n \to P_n$ definido por $(Tf)(x) := f(x+1)$.

4ª Questão: Seja V um espaço vetorial complexo com produto interno, N um operador normal em V, e $v\in V$ um vetor. Mostre que se $N^k v = 0$ por um inteiro $k\geq 1$ então $Nv=0$.

5ª Questão: A 'métrica' de Lorentz é definida por:
$$\| \alpha \|_L^2 := t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \qquad\qquad \alpha = (t,x,y,z)\in\mathbb{R}^4.$$
Um operador linear $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ é chamado uma transformação de Lorentz se para cada $\alpha\in\mathbb{R}^4$:
$$\| T\alpha \|_L^2 = \| \alpha \|_L^2 .$$
Seja H o espaço vetorial (real) das matrizes complexas autoadjuntas 2×2, e $U:\mathbb{R}^4\to H$ o operador:
$$U(t,x,y,z) = \begin{pmatrix} t+x & y+iz \\ y-iz & t-x \end{pmatrix}.$$
Se M é uma matriz complexa 2×2 definimos o operador $T_M : H\to H$ por $T_M(A) := M^\dagger A M$, e o operador $L_M:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ por $L_M := U^{-1}T_M U$.

1. Mostre que U é um isomorfismo e que para cada α: $\| \alpha \|_L^2 = det\, U(\alpha)$.
2. Mostre que se $|det M| = 1$ então L_M é uma transformação de Lorentz.

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA
Exame de Cálculo Avançado
Março de 2010

1ª Questão: Seja $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ dada por $f(x) = \|x\|^{-1}x$, com $\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{N} x_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

a. Calcule df.

b. Determine a imagem de $df(a)$, para $a = (1, \ldots, 1) = \sum_{n=1}^{N} e_n$.

2ª Questão: Sejam A e B abertos em $\mathbb{R}^N$ e $f : A \to B$ de classe C^∞. Suponha que f seja sobrejetiva e que $f'(x)$ seja uma bijeção, para todo x em $\mathbb{R}^N$. É verdade que f é um difeomorfismo entre A e B?

3ª Questão: (*Utilização de varias normas em espaços funcionais de dimensão infinita*) Seja E o espaço vetorial das funções continuas de $[-1; 1]$ em $\mathbb{C}$, munido da norma sup: $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[-1,1]} |f(t)|$.
Seja F o espaço vetorial das funções 2π-periódicas e continuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{C}$ que munimos alternativamente da norma N_2: $N_2(f) = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2}$ e da norma sup: $N_\infty(f) = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$.
Seja $L : E \to F$ a aplicação definida por $L(f)(t) = f(\cos(t))$.

a. Mostre que L é bem definida, linear e injetiva.

b. Mostre que L é continua por cada uma das normas N_2 e N_∞ de F e calcule $\|L\|_2$ e $\|L\|_\infty$.

4ª Questão: (*Topologia e teorema de Ascoli*) Sejam (E, d) um espaço métrico e $\mathcal{H}$ uma família equicontínua de funções de E em $\mathbb{R}$.

a. Mostre que o conjunto A dos $x \in E$ pelos quais o conjunto $\mathcal{H}(x)$ é limitado é aberto e fechado.

b. Suponhamos E compacto e conexo e que existe um $x_0 \in E$ tal que $\mathcal{H}(x_0)$ seja limitado. Utilize o teorema de Ascoli para demonstrar que $\mathcal{H}$ é relativamente compacto em $\mathcal{C}(E, \mathbb{R})$.

5ª Questão: Considere uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciável e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto conexo aberto limitado com a propriedade que para todo $x \in \partial\Omega$ existe um $y \in \Omega$ tal que o segmento de reta aberto que une x e y esteja contido em Ω (isto é, $\{tx + (1-t)y;\ t \in (0, 1)\} \subset \Omega$) e $\nabla f(x) \cdot (x - y) < 0$.

Mostre que existe $x_0 \in \Omega$ tal que $\nabla f(x_0) = \mathbf{0}$.

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA
Exame de Álgebra Linear
Março de 2010

1ª Questão: Seja P uma matriz quadrada $n \times n$ tal que $P^2 = P$ e que $0 < \dim \operatorname{Nuc} P = k < n$.

a. Determine todos autovalores de P.

b. Exiba uma matriz V não-singular e uma matriz diagonal D tal que $V^{-1}PV = D$.

2ª Questão: (*Uma condição necessária e suficiente de diagonalização sobre um polinômio anulador*) Sejam E um $\mathbb{K}$-espaço vetorial ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimensão finita n e $T \in \mathcal{L}(E)$.

a. Demonstre que T é diagonalizável se, e somente se, existe um polinômio $P \in \mathbb{K}[X]$ anulando T tal que $P(x) = \displaystyle\prod_{i=1}^{M}(x - a_i)$ com $a_i \in \mathbb{K}$ e, para todo $i, j = 1, \ldots, M$, $a_i \neq a_j$ se $i \neq j$.

Aplicações:

b. Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & & 0 \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$. Mostre que A é diagonalizável.

c. Sejam $A \in GL_n(\mathbb{C})$ e $p \in \mathbb{N}^*$. Mostre que A é diagonalizável se, e somente se A^p é diagonalizável.

d. Mostre que o mapa "transposição" $T : \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \to & M_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & A^T \end{array}$ é um operador diagonalizável.
Que conclusão podemos tirar para um operador involutivo geral ($T^2 = \mathrm{id}$)?

3ª Questão: Considere uma matriz real A 2×2.

a. Explique o significado geométrico da decomposição em valores singulares (SVD) de A: $A = U\Sigma V^T$, com U, V unitárias e Σ diagonal com entradas não-negativas. Explicite o significado geométrico de U, V, Σ.

b. Prove a existência da decomposição SVD para a matriz (real 2×2) A.

4ª Questão: (*Utilização do posto para caracterizar um operador antissimétrico por um produto vetorial*) Seja E um espaço euclidiano de dimensão 3.
Seja $f \in \mathcal{L}(E)$ um operador linear antissimétrico (i.e. para todo $(u, v) \in E^2, \langle f(u), v\rangle = -\langle u, f(v)\rangle$).

a. Demonstre que $\operatorname{Im} f = (\operatorname{Nuc} f)^\perp$ e deduza que $\operatorname{Im} f$ é estável por f.

b. Mostre que o posto de f é necessariamente par.

c. Demonstre que existe um único $a \in E$ tal que para todo $u \in E, f(u) = a \times u$ (produto vetorial).

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA
Exame de Cálculo Avançado
Agosto de 2010

1ª Questão: Seja $n \in \mathbb{N}$ e considere a função distância de Hausdorff definida por $\delta(A,B) = \mathrm{d}(A,B) + \mathrm{d}(B,A)$, onde $\mathrm{d}(A,B) = \sup_{a\in A}\inf_{b\in B}\|a-b\|$, $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Seja $\mathcal{F} = \{$ subconjuntos fechados não-vazios de $\mathbb{R}^n\}$. Sabendo que $(\mathcal{F},\delta)$ é um espaço métrico, mostre que ele é completo, ou seja, que as seguintes propriedades são válidas:

(i) Para uma seqüência ("de Cauchy") $\{A_m\}_m \subset \mathcal{F}$ satisfazendo $\delta(A_m, A_k) \to 0$, quando $m, k \to \infty$, o conjunto "limite"

$$W = \bigcap_{m\geq 1} \overline{\bigcup_{k\geq m} A_k}$$

pertence a $\mathcal{F}$.

(ii) Para $\{A_m\}_m$ e W como no item (i), $\delta(A_m, W) \to 0$, quando $m \to \infty$.

2ª Questão: Sejam U um aberto de $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, e $F : U \to \mathbb{R}^n$ uma função continuamente diferenciável com $F(x) \neq 0, \forall x \in U$. Considere $g : U \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \frac{1}{\|F(x)\|^2}, \quad x \in U,$$

onde $\|\cdot\|$ é a norma Euclidiana em $\mathbb{R}^n$. Mostre que g é continuamente diferenciável e determine a derivada direcional $Dg(x)\cdot v$ para um vetor qualquer $v \in \mathbb{R}^n$ e qualquer $x \in U$.

3ª Questão: Sejam $U, V \subset \mathbb{R}^d$ abertos, $d \in \mathbb{N}$, e $\Phi : U \to V$ um homeomorfismo. Suponha que Φ seja diferenciável em $x_0 \in U$ e $\det D\Phi(x_0) = 0$. Seja $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de cubos abertos ou fechados em U contendo x_0, cujos lados tendem a 0 quando $n \to \infty$. Denotando o volume d-dimensional de um conjunto por $\mathrm{Vol}(\cdot)$, mostre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{Vol}(\Phi(W_n))}{\mathrm{Vol}(W_n)} = 0.$$

4ª Questão:

(a) Anuncie o teorema de função inversa para uma função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

(b) Considere a função dada por $(u, v) = F(x, y) = (e^{2y} \operatorname{sen} x,\ e^{3y} \cos x)$. Mostre que para qualquer ponto (u_0, v_0) em uma vizinhança suficientemente pequena de $(0, 1)$, existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $F(x, y) = (u_0, v_0)$.

(c) Mostre que a função F do item (b) não possui inversa e explique porque isso não contradiz o teorema de função inversa.

(d) Mostre que a função $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $(u, v) = G(x, y) = (x^3, x^2 + y)$ possui inversa e o seu Jacobiano é igual a 0 no ponto $(0, 0)$. Explique, ainda, porque isso não contradiz o teorema de função inversa.

5ª Questão: Seja a função $f(x, y, z) = x - y + 2z$, $\forall(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Encontre todos os pontos extremos de f localizados no elipsóide $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + 2z^2 = 2\}$.

MESTRADO EM MATEMÁTICA APLICADA
Exame de Algebra Linear
Agosto de 2010

1ª Questão: Responda se cada afirmativa abaixo é verdadeira ou falsa, incluindo uma demostração ou um contra-exemplo, dependendo do caso.

(a) Se A é uma matriz $n \times n$, $n \in \mathbb{N}$, com um autovalor λ cujo autoespaço tem dimensão n, então A é uma matriz diagonal.

(b) A imagem e o núcleo de qualquer transformação linear em um espaço vetorial são subespaços invariantes pela transformação.

(c) Se A e B são duas matrizes quadradas de mesma dimensão satisfazendo $AB = BA$, então cada autoespaço de uma das matrizes é invariante também pela outra matriz.

(d) Se A e B são duas matrizes quadradas de mesma dimensão satisfazendo $AB = BA$ e ambas são diagonalizáveis, então o produto AB é diagonalizável.

(e) Se A e B são duas matrizes quadradas de mesma dimensão satisfazendo $AB = BA$ e com o produto diagonalizável então cada uma delas é diagonalizável.

2ª Questão: Seja $T : V \to V$ um operador linear invertivel, onde V é um espaço vetorial de dimensão finita. Mostre que

(a) Se λ é um autovalor de T, então $1/\lambda$ é um autovalor de T^{-1}.

(b) O autoespaço de T associado ao autovalor λ coincide com o autoespaço de T^{-1} associado a $1/\lambda$.

(c) Se T é diagonalizável, então T^{-1} é diagonalizável.

3ª Questão: Seja $V = C([-1, 1])$ o espaço de funções contínuas em $[-1, 1]$, munido com o produto escalar:

$$\langle f(t), g(t)\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t).$$

Considere o subespaço $P_2(\mathbb{R})$ dos polinômios de grau menor ou igual a 2.

(a) Use o processo de Gram-Schmidt para achar uma base orthonormal em $P_2(\mathbb{R})$.

(b) Encontre o polinômio em $P_2(\mathbb{R})$ que seja a melhor aproximação de $h(t) = e^t$ no intervalo $[-1, 1]$ em relação à métrica associada ao produto escalar acima.

4ª Questão: Seja V um espaço vetorial real. Dizemos que um subespaço vetorial N de V é um hiperespaço em V se N é um subespaço vetorial próprio maximal de V (i.e., se W é um subespaço de V contendo N, então ou $W = N$ ou $W = V$). Prove que todo hiperespaço em V é o núcleo de um funcional linear não-nulo em V.

5ª Questão: Seja A uma matriz real simétrica com autovalores positivos. Prove o seguinte teste de estabilidade de Lyapunov para o operador M: Suponha que $AM + M^H A = -I$. Se $Mx = \lambda x$, então $Re\,\lambda < 0$.